تحقیقات منابع آب ایران
Iran-Water Resources Research

سال دوازدهم، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵
Volume 12, No. 3, Fall 2016 (IR-WRR)
۲۱۸-۲۱۴

یادداشت فنی

مدل‌سازی تحلیلی و عددی جریان زیر سطحی در کانال‌های باز با مقطع نیم دایره

سیدحسین مجتهدی[۱]، حجت دهستانی[۲*] و منصوره کدخدای بلقور[۲]

چکیده

در این مقاله، راه حل تحلیلی و مدل‌سازی عددی برای محاسبه سرعت نشت حالت پایدار محصور نشده از یک کانال منحنی شکل با مقطع نیم دایره و با نسبت $T/y = 2$ (T، عرض سطح آزاد و y، عمق آب) ارائه شده است. راه حل تحلیلی محاسبه سرعت نشت از کانال‌های منحنی شکل به دلیل مشکل بودن نگاشت کانفرمال پروفیل سطح مقطع این گونه کانال‌ها عمومیت نیافته است. در کار حاضر از هدوگراف سرعت و تبدیل شوارتز- کریستوفل برای نگاشت کانفرمال استفاده شده است. سپس محاسبات راه حل تحلیلی سرعت نشت در حالت نشت پایدار از کانال با مقطع نیم دایره که لایه زهکش زیرین آن در عمق بی نهایت قرار گرفته است (گسترش نامحدود محیط متخلخل) انجام گردید. در کنار روش تحلیلی، از یک مدل سازی عددی بر پایه روش اجزاء محدود استفاده شده که برای این کار، نرم افزار تجاری Seep/W مورد استفاده قرار گرفته است. در عین حال، برای صحت سنجی مدل عددی، از نتایج حاصل از راه حل تحلیلی محققین قبلی در مورد محاسبه دبی نشت از یک کانال ذوزنقه‌ای استفاده گردید. نتایج نشان می‌دهند که روش عددی دقت قابل قبولی را در مقایسه با روش تحلیلی دارد و می‌تواند برای تخمین سرعت نشت از یک کانال منحنی شکل با مقطع نیم دایره و با شرایط هیدرولیکی مشخص بکار برده شود.

کلمات کلیدی: سرعت نشت- کانال نیم دایره- نگاشت کانفرمال- روش عددی- هدوگراف سرعت.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۴/۱۲/۱۰
تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۲/۱۱

۱- مربی، عضو هیئت علمی موسسه آموزش عالی اسرار مشهد
۲- مربی، عضو هیئت علمی دانشگاه مهندسی فناوری‌های نوین قوچان
۳- کارشناس ارشد ژئو تکنیک ، شرکت طوس آب.
*- نویسنده مسئول

Technical Note

Analytical and Numerical Modelling of Unconfined Steady State Seepage in Curved Canal with Semicircle Cross Section

S. H. Mojtahedi [1] , H. Dehestani[2] and M. Kadkhoday Balghour [3]*

Abstract

In this study the analytical and numerical methods are presented for computing the unconfined steady state seepage velocity from a curved canal with semicircle cross section with $\frac{T}{y} = 2$. The analytical solution of seepage from curved canals has not been generalized due to the difficulty of conformal mapping of their cross sections. In the present study the velocity hodograph and the Schwarz-Christoffel transformation have been used for this purpose. Then the computation of analytical solution of seepage velocity was performed in which the drainage layer has lied in infinite depth. Along with this analytical solution a numerical modeling has been used based on finite element method using commercial software SEEP/W. Because of availability of high-speed digital computers along with specialized softwares, the approximate solutions by numerical methods have gained importance. The verification of numerical modeling was performed using the results of available analytical solutions of seepage discharge from a trapezoidal canal cross section. The results show that the numerical method has an acceptable accuracy in comparison with the analytical solution and can be used to estimate seepage velocity through the semicircle canals.

Keywords: Customer satisfaction, Methods of meter reading, Remote meter reading, Pre-paid meter

Received: February 29, 2016
Accepted: April 30, 2016

1- Department of Civil Engineering, Asrar Institute of Higher Education, Mashhad, Iran
2- Department of Civil Engineering, Quchan University of Advanced Technology, Quchan, Iran. Email: dehestani@qiet.ac.ir
3- TOOS-AB Consulting Engineering Co., Mashhad, Iran
*- Corresponding Author

۱- مقدمه

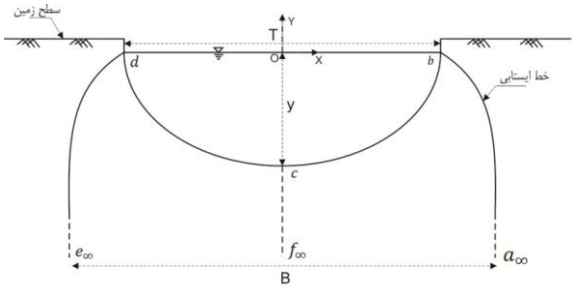
راه حل تحلیلی برای محاسبه دبی نشت از کانال‌های منحنی شکل محدود است. همچنین برخی از کارهای انجام گرفته دارای ضعف‌ها و یا محدودیت‌هایی هستند، این محدودیت‌ها بدان جهت است که بدست آوردن رابطه‌ای تحلیلی برای محاسبه مقدار سرعت نشت از بستر کانال، از راه‌حل انجام گرفته برای محاسبه دبی نشت نتیجه می شود. بیشتر مطالعات صورت گرفته، در زمینه بدست آوردن رابطه تحلیلی برای محاسبه دبی نشت از کانال‌ها می‌باشند و مطالعات کمتری به رابطه سرعت نشت از بستر کانال پرداخته‌اند که این کمبود در مورد کانال‌های منحنی شکل بیشتر صدق می‌کند. در اکثر روش‌های تحلیلی از بحث نگاشت اعداد مختلط و مخصوصاً نگاشت کانفرمال استفاده شده است. محققینی نظیر Kozney (1962) و Anakhaef (2004) دبی نشت از یک کانال منحنی شکل را با بکار بردن تابع ژاکوفسکی تحقیق کردند. Kovacs (1981) نیز راه حل تحلیلی را برای نشت از یک مقطع دایره‌ای بر حسب سری‌های به سرعت همگرا بدست آورد. Illinskey and Kacimov (1984) شکل بهینه یک کانال آبیاری منحنی شکل را از دیدگاه اتلاف حداقل نشت با بکار بردن روش مسائل مقدار مرزی معکوس نتیجه گرفتند. در روش‌های عددی بکار گرفته شده توسط محققین مختلف نیز می‌توان به روش Swamee and Kashyap (2001) اشاره نمود که نشت از کانال‌های بدون گوشه شامل کانال دایروی را با بکار بردن روش عددی تفاضلات محدود بدست آوردند. در تمام روش‌های ذکر شده نتیجه جانبی منتج به سرعت نشت از بستر کانال ارائه نشده است. در این مقاله از روش عددی اجزاء محدود که توسط نرم افزار تجاری SEEP/W انجام می‌شود استفاده و روش نگاشت کانفرمال نیز در بدست آوردن رابطه تحلیلی سرعت نشت بکار برده شده است. نکته مهم و قابل ذکر در این است که در این پژوهش برای بدست آوردن معادلات تحلیلی سرعت نشت از بستر یک کانال با مقطع نیم دایره، از راه حل تحلیلی انجام شده بر روی یک کانال منحنی شکل با مقطع نیمه بیضی استفاده شده است. بطوریکه عرض سطح آب (T) قطر بزرگ و عمق آب (y) قطر کوچک مقطع نیمه بیضی می‌باشند. در انتها نیز نتایج برای یک کانال با مقطع نیم دایره با نسبت $T/y = 2$ ارائه خواهد شد.

۲- روش تحقیق

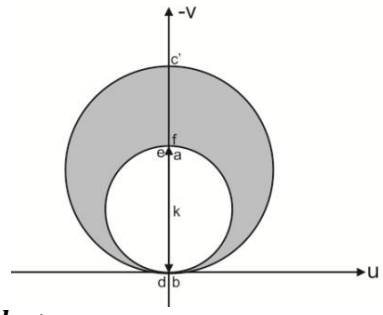
۲-۱- معادلات حاکم و روش حل تحلیلی

الگوی نشت از کانال منحنی شکل در شکل ۱ نشان داده شده است. محیط متخلخل زیرین کانال، محیطی همگن، همسانگرد و با عمق نامحدود است. از اثرات موئینگی، تراوش و تبخیر صرف نظر و فرض می‌گردد که جریان نشت حالت پایدار دارد و قانون دارسی را ارضاء می‌نماید. به دلیل طول قابل توجه کانال، جریان نشت بصورت دو بعدی در صفحهٔ قائم در نظر گرفته می‌شود. به دلیل تقارن قائم محدودهٔ جریان نشت، راه حل برای نیمی از محدوده نشت یعنی $abcfa$ انجام می‌گردد. پتانسیل مختلط به صورت $w = f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ تعریف می‌شود که در آن، ϕ پتانسیل سرعت (m^2/s) و ψ نیز تابع جریان (m^2/s) می‌باشند. اگر صفحهٔ فیزیکی مسأله بصورت $Z = X + iY$ تعریف شود؛ سپس قانون دارسی، سرعت در جهات X و Y را به ترتیب برابر $u = \partial\phi/\partial X = -k(\partial h/\partial X)$ و $v = \partial\phi/\partial Y = -k(\partial h/\partial Y)$ نتیجه خواهد داد. در این روابط h معرف هد (m) و k معرف ضریب نفوذ پذیری (m/s) می‌باشند. در صفحهٔ هدوگراف سرعت $(dw/dZ = u - iv)$ خط ایستابی یعنی ab در امتداد یک دایره به شعاع k و مرکز $(0,-k/2)$ نگاشت می‌شود. نکتهٔ مهمی که در این بخش باید به آن اشاره شود این است که شکل دقیق نگاشت مرز کانال یعنی bcd مشخص نمی‌باشد. بنابراین روشی که در اینجا اتخاذ می‌شود، روش معکوس نام دارد. در ناحیهٔ dw/dZ (هدوگراف سرعت)، شکل مرز کانال bcd مطابق شکل ۲ بصورت یک دایره انتخاب می‌شود که بر روی محور v قرار دارد. Mojtahedi and Maghrebi (2010) این فرض را در راه حل ذکر شده معرفی نمودند و بعد از اتمام کلیهٔ عملیات ریاضی و محاسبات لازم و بدست آوردن معادلهٔ پروفیل کانال با این روش و مقایسهٔ آن با شکل سطح مقطع در نظر گرفته شده برای کانال مسأله، نتیجه گیری کردند که فرض در نظر گرفته شده برای نگاشت مرز bcd قابل قبول است. پس با توضیحات داده شده می‌توان فرض کرد که مرز مذکور مطابق شکل ۲ در امتداد یک دایره به قطر c' در صفحهٔ هدوگراف سرعت نگاشت می‌شود.

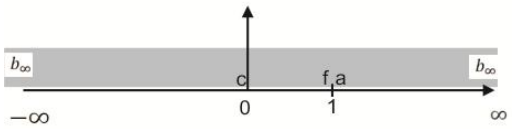
شکل صفحات پتانسیل مختلط و معکوس هدوگراف سرعت را می‌توان با انجام گام‌های استاندارد ارائه شده توسط Harr (1962) و Polubarinova and Kochina (1962) رسم کرد.



شکل ۱- صفحهٔ فیزیکی مسأله (صفحهٔ Z)



شکل ۲- صفحهٔ هدوگراف سرعت (dw/dZ)



شکل ۳- صفحهٔ کمکی (ξ)

صفحهٔ معکوس هدوگراف سرعت dZ/dw و صفحهٔ پتاسیل مختلط w توسط تبدیل شوارتز-کریستوفل بر روی نیمهٔ بالایی صفحهٔ کمکی ξ مطابق شکل ۳ نگاشت خواهند شد. با نگاشت صفحهٔ پتانسیل مختلط بر روی صفحهٔ ξ معادلهٔ زیر بدست می‌آید:

$$w = \frac{-q_S}{2\pi}\int_0^{\zeta}\frac{dt}{(t-1)\sqrt{t}} = \frac{-q_S}{2\pi}Ln\frac{\sqrt{\zeta}-1}{\sqrt{\zeta}+1} \qquad (۱)$$

که در این روابط q_s دبی نشت در واحد طول کانال (m^2/s) و t متغیر مجازی می‌باشند. بطور مشابه با نگاشت صفحهٔ dZ/dw بر روی صفحهٔ ξ خواهیم داشت:

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)}} - \frac{i}{c'} \qquad (۲)$$

سپس نگاشت صفحه فیزیکی مسأله یعنی صفحه Z انجام می‌شود. با استفاده از روابط قبل، رابطه زیر برای نگاشت صفحه فیزیکی مسأله بدست خواهد آمد:

$$Z = \frac{q_S}{\pi c'}\tan^{-1}\sqrt{-\zeta} - i\left(y - \frac{2q_S}{\pi^2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{c'}\right)\int_0^{\sinh^{-1}\sqrt{-\zeta}}\frac{\pi d\tau}{\cosh\tau}\right) \qquad (۳)$$

حال برای بدست آوردن معادله پروفیل توزیع سرعت آب نشت یافته از کانال که بصورت عمود بر محیط بستر کانال می‌باشد، از معادله نگاشت معکوس هدوگراف سرعت یعنی رابطه (۲) استفاده می‌شود. شرط مرز کانال یعنی bc که $-\infty < \xi \le 0$ می‌باشد بر معادله (۲) اعمال شده و پس از ساده کردن رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{-\pi y}{2Gk(T+\pi^2 y/4G)}\sinh^{-1}\sqrt{-\zeta} - i\frac{T}{k(T+\pi^2 y/4G)} \qquad (۴)$$

با توجه به تعریف هدوگراف سرعت بصورت $\frac{dZ}{dw} = 1/(u-iv)$، جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی آن و مساوی قرار دادن آن با بخش‌های متناظر رابطه (۴)، معادله پروفیل سرعت بصورت رابطه (۵) نتیجه خواهد شد:

$$\frac{V}{k} = \frac{\left(1+\pi^2/8G\right)}{\sqrt{\left(\left(\pi\sinh^{-1}\tan(\pi X/T)\right)/4G\right)^2+1}} \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) مقدار حداکثر سرعت نشت در نقطه $X=0$ یعنی نقطه حداکثر عمق آب (نقطه مرکزی کانال) رخ می‌دهد و مقدار آن برابر $(\frac{V}{k})_{max} = -2.3469$ می‌باشد. جهت یافتن اندازه بردار (V/k) در هر نقطه پروفیل کانال می‌توان از رابطه (۵) استفاده کرد. این بردار در هر نقطه از پروفیل کانال، بر آن عمود است.

۲-۲- روش حل در روش اجزای محدود در نرم‌افزار SEEP/W

در این پژوهش برای مدل‌سازی عددی از نرم افزار اجزاء محدود SEEP /W که زیرمجموعه‌ای از نرم‌افزار اجزاء محدود GEO-OFFICE می‌باشد استفاده شده است. دامنه کاربرد این نرم افزار در پروژه‌های مختلف ژئوتکنیک، زمین‌شناسی و هیدرولیکی می‌باشد. این نرم افزار قادر است که در شرایط مختلف جریان، پارامترهایی از قبیل مقدار سرعت و نشت از کانال‌ها و میزان دبی عبوری از کانال‌ها یا سدهای خاکی را تحلیل و تعیین نماید.

این مدل قادر است تا شرایط مختلف جریان از قبیل اشباع یا غیر اشباع بودن، با این فرض که ضرائب تراوایی و آب محتوا به صورت تابعی از فشار آب منفذی می‌باشند و محصور یا غیر محصور بودن سفره را در حالت دو بعدی با استفاده از روش عددی اجزاء محدود تحلیل نماید. دامنه کاربرد این نرم افزار، پروژه‌های مختلف ژئوتکنیکی، هیدروژئولوژیکی، زمین شناسی و معدن است. معادله اساسی حرکت آب زیر زمینی به صورت دو بعدی و تحت شرایط

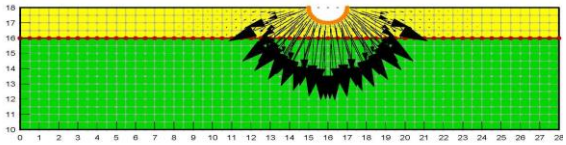
اشباع و غیر اشباع بودن جریان، از تلفیق قانون دارسی و معادله پیوستگی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)=C\frac{\partial}{\partial t}(h)+Q \qquad (۶)$$

که در آن K_x و K_y مؤلفه‌های ضریب نفوذ پذیری، h هد هیدرولیکی، t زمان، x و y مختصات دکارتی، C شیب منحنی ضریب ذخیره و Q هر منبع جریان مانند پمپاژ، تغذیه و .... می‌باشند. هد هیدرولیکی توسط رابطه زیر با آب محتوای حجمی θ مربوط می‌شود:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=C\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (۷)$$

برای حل معادله (۶) به روش اجزاء محدود از تکنیک تقریب زنی گالرکین (Galerkin approach) استفاده شده است. تکنیک مذکور قادر است با استفاده از شرایط مرزی مناسب، یک راه حل تقریبی برای معادله (۶) ارائه نماید.



شکل ٤- مدل سازی عددی سرعت نشت در یک کانال نیم دایره

۳- صحت سنجی مدل و انجام مدل سازی عددی

برای مدل سازی عددی در نرم افزار ابتدا دو لایه تعریف شد. لایه ابتدایی یک لایه رس با نفوذپذیری پایین و با ضخامت کم می‌باشد که کانال مورد تحلیل بتنی در اشکال مختلف هندسی در این لایه قرار می‌گیرد. لایه دوم یک لایه ماسه با نفوذپذیری بالا و در یک محیط متخلخل با عمق زیاد می‌باشد. در ابتدا جهت کالیبره کردن مدل عددی، کانال ذوزنقه‌ای در نرم افزار SEEP/W مدل شد و نتایج دبی نشت از بستر آن با یکی از روش‌های تحلیلی محققین قبلی مقایسه گردید. کانال ذوزنقه‌ای بتنی دارای مشخصات هندسی عرض کف ۱ متر و عرض سطح آزاد ۳ متر می‌باشد. همچنین ارتفاع کانال تا سطح آزاد آب ۱ متر بوده و شیب جداره‌های کانال ذوزنقه‌ای ۴۵ درجه می‌باشد. جهت صحت سنجی مدل عددی از نتایج حاصل از راه حل تحلیلی دبی نشت که توسط Swamee et al. (2000) ارائه شده و Chahar (2001) نیز آن را در مورد راه حل ودرنیکف بسط داده است استفاده می‌شود. دبی نشت به صورت رابطه زیر می‌باشد:

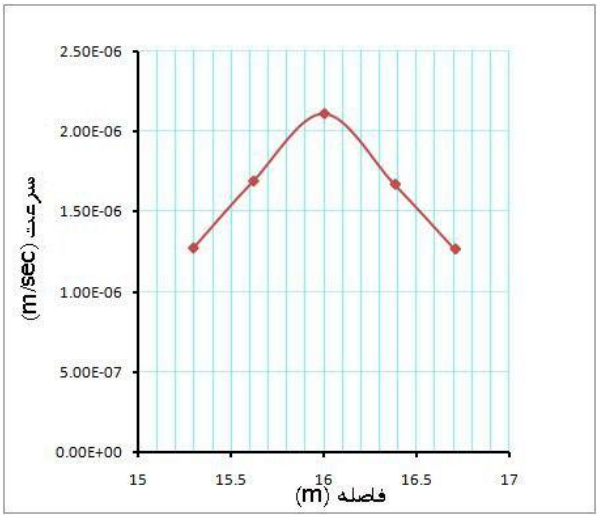
$$q=kyF \qquad (۸)$$

که در این رابطه، y عمق آب در کانال (m)، F تابع هندسه کانال (بدون بعد) و k ضریب نفوذ پذیری $(\frac{m}{s})$ می‌باشند.

Swamee et al. (2000) برای تابع هندسه کانال رابطه زیر را ارائه نمودند:

$$F=\left(\left((\pi(4-\pi))^{1.3}+(2m)^{1.3}\right)^{\frac{0.77+0.462m}{1.3+0.6m}}+\left(\frac{b}{y}\right)^{\frac{1+0.6m}{1.3+0.6m}}\right)^{\frac{1.3+0.6m}{1+0.6m}} \qquad (۹)$$

که در این رابطه، m شیب جداره کانال $(m^H:1^V)$، b عرض بستر کانال (m) و y عمق آب در کانال (m) می‌باشند. بر اساس رابطه (۹) مقدار تابع هندسه کانال برابر 5.54042 و در نتیجه با توجه به مقدار ضریب نفوذپذیری $(1\times10^{-6}\,m/s)$ مقدار دبی نشت از بستر کانال، برابر $5.54042\ m^3/s$ حاصل گردید. براساس نتایج مدل‌سازی عددی، مقدار دبی عبوری از بستر کانال ذوزنقه‌ای $4.84\times10^{-6}\,m^3/s$ بدست آمده است که در مقایسه با مقدار تحلیلی، نتایج دبی حاصل از مدل‌سازی عددی دارای حدود ۱۲ درصد خطا می‌باشد. با توجه به فرضیات و ساده‌سازی‌هایی که در مدل سازی عددی صورت گرفته است می‌توان نتیجه گرفت که ۱۲ درصد خطا معقول بوده و مدل سازی انجام شده با روش تحلیلی تطابق مناسبی دارد. پس از انجام صحت سنجی مدل عددی، به مدل‌سازی عددی کانال منحنی شکل پرداخته می‌شود. کانال منحنی شکل که از جنس مصالح بتنی می‌باشد دارای مشخصات هندسی قطر کانال نیم دایره برابر ۲ متر و عمق آب برابر ۱ متر می‌باشد.



شکل ۵- نمودار سرعت نشت از بستر کانال نیم دایره

با توجه به نمودار ارائه شده در شکل ۵ و نمایش کنتورهای سرعت در شکل ۶، تراکم این کنتورها در پایین‌ترین نقطه کانال نشان‌دهنده این است که سرعت نشت در روی بستر کانال و در پایین ترین نقطه، بیشترین مقدار را دارد که این نتایج با نتایج تحلیلی یعنی رابطه (۵) هم‌خوانی مناسبی دارند. مقدار حداکثر سرعت نشت برابر $2.25 \times 10^{-6} m/s$ می‌باشد.

٤- بحث و نتیجه‌گیری

با مشاهده و بررسی نتایج حاصل از روش تحلیلی و عددی می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:

الف) با توجه به اعمال فرضیات ساده کننده در روش تحلیلی و مدل‌سازی مسأله تقریباً با همان شرایط در روش عددی، می‌توان گفت نتایج روش تحلیلی به دلیل حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله دقیق‌تر می‌باشد.

ب) خطای ۴/۱۳ درصدی بین نتایج حداکثر سرعت نشت در روش‌های تحلیلی و عددی مقدار قابل قبولی بوده، بنابراین می‌توان گفت روش تحلیلی به عنوان یک رابطه که تخمین مناسبی برای حداکثر سرعت نشت ارائه می‌دهد قابل کاربرد است.

ج) با توجه به رابطه (۵) حداکثر سرعت نشت در نقطه مرکزی بستر کانال رخ می‌دهد که گراف شکل ۵ نیز مؤید این نکته است.

د) نتایج مدل‌های عددی تنها برای مسائل عددی قابل استفاده هستند اما رابطه‌ای عمومی توسط روش‌های عددی نمی‌توان ارائه نمود. از طرف دیگر مدل‌های تحلیلی دارای این مزیت هستند که از آنها می‌توان به عنوان یک راه حل عمومی در شرایطی که بر اساس آن ایجاد شده‌اند بهره جست. همچنین با داشتن یک رابطه مشخص، امکان برآورد سریع و آسان را با دقت مناسبی فراهم می‌آورند.

ه) حسن روش تحلیلی ارائه شده در بخش ۲-۱ در این است که می‌توان مقدار $(\frac{V}{k})_{max}$ را برای نسبت‌های غیر از $\frac{T}{y} = 2$ (کانال نیم دایره) نیز بدست آورد.

٥- مراجع

Anakhaef KN (2004) Free percolation and seepage flows from watercourses. Journal of Fluid Dyn 39(5):756-761

Chahr BR (2001) Extension of Vedernikov's graph for seepage from canals. Journal of Ground Water 39(2):272-275

Geo-slope International Ltd (2007) SEEP/W for finite element seepage analysis. www.geo- slope. com

Harr ME(1962)Groundwater and Seepage. McGraw-Hill Inc, New York, NY

Kovacs G(1981) Seepage Hydraulics. Elsevier Scientific Publishing Company

Ilyinskii NB, Kacimov AR (1984) Seepage limitation optimization of the shape of an irrigation channel by the inverse boundary value problem method.Journal of Fluid Dyn19(4):404-410

Polubarinova-Kochina PY (1962) Theory of groundwater and movement. Princeton University Press, Princeton, NJ

Swamee PK, Kashyap D (2001) Design of minimum seepage loss nonpolygonal

canal sections.Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE127(2):113-117

Mojtahedi SH, Maghrebi MF (2010) Analytical method in seepage computation from a canal with a semi-elliptic section using conformal mapping.Iranian Journal of Irrigation and Drainage, 1(4):22-30 (In Persian)