



Analysis of the Frequency and the Spell of Rainy Days Using Markove Chain Model for City of Tabriz, Iran

H. Asakereh¹

Abstract

In this paper the frequency and the spell of rainy days is analyzed for the city of Tabriz in northwestern Iran. This is done based on probability rule, stochastic process, and Markov Chain technique. The 55 year rain data (1951-2005) for Tabriz synoptic station is used. The frequency matrix is formed and the probability matrix of rainy - dry days is created accordingly based on maximum likelihood method. Recurrence interval is estimated based on persistence probability calculated based on succeed power on probability matrix. Rainy and dry days have 5- and 1-year return period (e.g. probability of 0.2206 and 0.7794), respectively. Finally the 1-5 day rain spell have calculated. The most probable spell length occurred in spring (mainly in May). For example, a 2-day rain in May would occur with a return period of 2.5 days.

Keywords: Rainy Day, Markov Chain, Occurance Probability, Maximum likelihood, Tabriz City

بررسی احتمال تواتر و تداوم روزهای بارانی در شهر تبریز با استفاده از مدل زنجیره مارکوف

حسین عساکره^۱

چکیده

در این پژوهش تواتر و تداوم روزهای بارانی شهر تبریز براساس قوانین احتمالی، به صورت فرایندهایی تصادفی و با استفاده از تکنیک زنجیره‌های مارکوف در معرض تحلیل قرار گرفت. برای دستیابی به این مقصود از آمار بارش روزانه مربوط به ۵۵ سال (۱۹۵۱-۲۰۰۵) ایستگاه تبریز بهره گرفته شد. آمار منبسط براساس ماتریس شمارش تغییر حالت روزهای بارانی و فاقد بارش مرتب شده، سپس ماتریس احتمال تغییر وضعیت براساس روش درستنمایی بیشینه محاسبه گردید. با توان‌های مکرر این ماتریس، احتمال پایا و دوره بازگشت روزانه هر یک از دو حالت بارش - خشکی برآورد شد. دوره‌های بازگشت بارش حدود ۵ روز و دوره بازگشت خشکی حدود ۱ روز برآورد گردید. درواقع احتمال وقوع بارش در هر روز ۰/۲۲۰۶ و احتمال عدم وقوع آن ۰/۷۷۹۴ بدست آمد. سپس دوره بازگشت تداوم روزهای بارانی ۱ تا ۵ روزه برای دوازده ماه سال محاسبه گردید. بیشترین احتمال وقوع روزهای بارانی طی بهار (بویژه ماه مه) بوده است. برای مثال دوره بازگشت دو روز بارانی متوالی در ماه مه حدود ۲/۵ روز است.

کلمات کلیدی: روز بارانی، زنجیره مارکوف، احتمال وقوع، درستنمایی بیشینه، شهر تبریز

تاریخ دریافت گزارش فنی: ۲۰ شهریور ۱۳۸۶

تاریخ پذیرش گزارش فنی: ۲۳ مرداد ۱۳۸۷

¹- Assistant Professor, Department of Geography, Zandjan University, Zandjan, Iran (e-mail: asakereh@znu.ac.ir)

۱- استادیار گروه جغرافیا دانشگاه زنجان

۱- مقدمه

برخی پدیده‌های طبیعی و اقلیمی در مشاهدات پیاپی و تحت شرایط مشخص، و طبعاً در طول زمان نتایج یکسانی را بروز نمی‌دهند و ممکن است هر بار چهره‌ای متفاوت از بقیه نمودها ارائه نمایند. این قبیل پدیده‌ها و پدیده‌های مشابه به فرایندهای تصادفی موسومند. طبق تعریف: "فرایندهای تصادفی به پدیده‌هایی گفته می‌شوند که نمی‌توان نتیجه آنها را پیش از رخ دادن به طور قطع معلوم کرد." یک فرایند تصادفی مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که طی زمان، مقادیر (مشاهدات) مختلفی را نشان می‌دهند. برای مثال خشکسالی، ترسالی، وقوع سیلاب، وقوع بارش با مقدار معین، ریزش برف در یک زمان خاص، وقوع موج گرمایی، آستانه دمایی معین و... فرایندهای تصادفی به شمار می‌آیند. واضح است که وقوع رویدادهای مزبور به عوامل متعددی بستگی دارد که تغییر اندکی در هر کدام از این عوامل ممکن است ماهیت آن را به میزان زیادی تغییر دهد یا حتی از رخ دادن آن جلوگیری کند. بنابراین در مشاهده‌های مختلف از این رخدادها و هر پدیده مشابه دیگر نتیجه‌های متفاوتی حاصل می‌شود که پیش از رخ دادن آن، نمی‌توان به طور قطع معلوم کرد که چه نتیجه‌ای حاصل خواهد شد. بدین دلیل پدیده‌های مزبور را می‌توان فرایندهایی تصادفی دانست.

توجه به پدیده‌های اقلیمی به عنوان فرایندهای تصادفی در مطالعات بی‌شماری قابل رویت است. برای مثال (1978) Buishand اصول مدل‌سازی احتمالی را برای داده‌های بارش ارائه نمود. تغییرات اقلیمی بوسیله (1983) Benzi و همکاران در قالب تئوری‌های فرایندهای احتمالی مورد بررسی قرار گرفت. (1983) Berger and Goossens تفاوت دوره‌های خشک و تر ایستگاهی در بلغارستان را براساس زنجیره‌های مارکوف تحلیل نمودند. احتمال وقوع بارش‌های روزانه کره جنوبی نیز بوسیله (1994) Moon و همکاران در معرض توجه قرار گرفت. (1999) Burgers and Stephenson نیز به پدیده ال‌نینو از دیدگاه احتمالی پرداخته‌اند. (1999) Martin-Vide and Gomez نیز براساس احتمالات مارکوفی طول دوره‌های تر و خشک را در اسپانیا پهنه بندی نمودند.

در ایران مشکانی (۱۳۶۳) احتمال تواتر روزهای خشک بابلسر، جعفری بهی (۱۳۷۸) نمونه‌هایی از ایستگاه‌های با بارش روزانه حداقل ۳۰ سال، زارعی و شاهکار (۱۳۸۰) تواتر روزهای بارانی خرمدره، اردک و زشک و نیز حجازی زاده و شیرخانی (۱۳۸۴) خشکسالی و دوره‌های خشک کوتاه مدت استان خراسان را تحلیل نموده‌اند.

همان گونه که می‌دانیم، بروز بارش یا خشکسالی پدیده‌ای است طبیعی که ریشه در تغییرپذیری نهادی دستگاه اقلیم و مهم تر از همه گردش عمومی هوا دارد. همچنان که ویژگی‌های زمانی - مکانی تک بارش‌ها تابعی از سامانه‌های سینوپتیک پدید آورنده آنهاست، بزرگی، گستره و فراوانی بارندگی نیز الگوهای مشخص را نشان می‌دهند. پسروری پرفشارهای جنب حاره، چرخه موسمی‌های تابستانی، افزایش دمای آب‌های سطحی اقیانوس و جابجایی مسیر سامانه‌های باران زای عرض‌های میانه سبب افزایش روزهای بارانی می‌شود (غیور و مسعودیان ۱۳۷۶).

کمبود روزهای توام با بارندگی از ویژگی‌های اصلی آب و هوای ایران محسوب می‌گردد. اساساً این خصوصیت در قلمرو آب و هوای مرطوب و اقلیم‌های خشک قابل مشاهده است. به طور کلی هیچ منطقه‌ای از کشور از تاثیر این پدیده در امان نبوده و به نسبت موقعیت طبیعی آن را تجربه می‌نماید. در این پژوهش تلاش می‌شود تعداد روزهای توام با بارندگی در یکی از ایستگاه‌های نسبتاً پرباران کشور در معرض تحلیل قرار گیرد. در این نوشتار علاوه بر معرفی برخی توانایی‌های روش موسوم به زنجیره‌های مارکوف، الگوی احتمالی روزهای بارانی در تبریز معرفی خواهد شد.

رویدادهای اقلیمی به عنوان پدیده‌های تصادفی به طور دقیق قابل پیش بینی نیستند ولی از مشاهده پیاپی آنها آگاهی‌های مفیدی به دست می‌آید که از طریق قوانین احتمالی قابل تعریف هستند. فهم بسیاری از رویدادهای اقلیمی منوط به شناخت احتمال وقوع این فرایندهاست.

براساس قوانین احتمالی برخی پدیده‌های تصادفی، شانس بیشتری برای وقوع دارند در صورتی که شانس وقوع برخی دیگر کمتر است. همچنین گاهی از بین n حالت ممکن، تنها یکی از حالت‌ها می‌تواند رخ دهد؛ در ضمن امکان رخ دادن هیچ کدام از این حالت‌ها، بر حالت‌های دیگر برتری ندارد (Akan and Houghtalen, 2003). برای محاسبه شانس وقوع پیشامدها لازم است مدل مناسبی انتخاب شود. بررسی این حالت‌های نامعین یا تصادفی و انتخاب مدل را دانش احتمال بر عهده دارد. در این تحقیق تلاش بر این است که با بهره‌گیری از این دانش و براساس رویه‌ای موسوم به "زنجیره‌های مارکوف" احتمال وقوع روزهای بارانی در ایستگاه تبریز بررسی شود. زنجیره مارکوف یک روش ریاضی برای مدل‌بندی فرایندهای تصادفی است.

۲- داده‌ها

در این تحقیق داده‌های بارش روزانه ایستگاه تبریز برای دوره آماری ۲۰۰۵-۱۹۵۱ (۵۵ سال) مورد بررسی قرار گرفت. تبریز مرکز استان آذربایجان شرقی و در فلات مرتفع آذربایجان واقع شده است. مختصات جغرافیایی ایستگاه سینوپتیک تبریز به شرح زیر است:

$$N: 38^{\circ} 5'$$

$$E: 46^{\circ} 17'$$

موقعیت و مقر استقرار این شهرستان یعنی سرزمین مرتفع و نیز قرار گرفتن در مسیر اصلی بادهای غربی شرایط ویژه‌ای به لحاظ بارندگی برای آن مهیا نموده است. سیستم‌های ویژه موثر بر بارندگی این بخش از کشور (سیستم‌های مدیترانه‌ای) بعد از یک دوره ضعف، با بهره‌گیری از رطوبت مدیترانه و بعضاً دریای سیاه فرایند اشباع را تجربه نموده، بارندگی‌ها در این بخش از کشور تقویت می‌شوند (علیچانی، ۱۳۷۴). بدین دلیل برنامه ریزی کشاورزی مبتنی بر بارندگی در این شهرستان از اهمیت بالایی برخوردار است. شرایط ویژه اقتصادی، بخصوص پهنه‌های مهم کشت و کار گیاهان پایا و ناپایا دلیلی معقول و قابل قبول برای مطالعه تواتر روزهای بارانی در این محدوده از کشور می‌باشد.

۳- روش‌ها

هر برآمد (نتیجه) فرایندهای تصادفی که تنها به برآمد بلافاصله قبل از آن بستگی دارد را فرایند تصادفی با ویژگی مارکوف گویند. برای این اساس فرایند تصادفی که در ویژگی مارکوف صدق کند، فرایند یا زنجیره‌های مارکوف می‌نامند (Higenz and Macnalti 1379). زنجیره گویای این واقعیت است که هر برآمد به رویداد بلافاصله قبل از خودش وابسته می‌باشد و به رویدادهای ماقبل دیگر مربوط نمی‌شود. در واقع در این رویه احتمال وقوع یک حالت اقلیمی در زمان t به وضعیت آن در زمان قبل یعنی $t-1$ بستگی دارد (علیزاده ۱۳۸۵). مثلاً احتمال خشکی امروز براساس وضعیت بارش روز قبل بررسی می‌شود. بنابراین برای هر زوج حالت‌های متوالی یک احتمال وجود دارد. در این صورت احتمال تغییر هر یک از مشاهدات از حالتی به حالت دیگر مشخص می‌شود. در بسیاری فرایندهای تصادفی، ممکن است برقراری ویژگی مارکوف معلوم نباشد. در این صورت ویژگی مارکوف یک فرض در نظر گرفته می‌شود. با این وصف روش‌های معتبری برای آزمون برقراری ویژگی مارکوف وجود دارد که عمده ترین آنها آزمون استقلال و آزمون علیه روند است. در این تحقیق با در نظر گرفتن برآمدهای احتمال حالت گسسته در زمان به ترتیب مراحل چهار گانه زیر به انجام رسید:

۱- داده‌های بارش روزانه به صورت زنجیره ای مارکوفی و برحسب آستانه صفر مرتب شدند. در این روش روزهای فاقد بارش (بارندگی صفر میلی‌متر) شرایط خشکی (D)، مقادیر بیشتر از صفر شرایط بارانی (W) به حساب آمد. در ابتدا به نظر رسید که طبق پیشنهاد Gibbs and Maher (1967) از آستانه‌های چندکی استفاده شود. اما براساس آزمون و خطا معلوم شد که عدد صفر در تمامی روزهای سال به حدی تکرار شده است که تمامی آستانه‌های معرف روز خشک در روش گیبس - ماهر را می‌پوشاند. لذا از عدد صفر برای تعریف روز بدون بارش بهره گرفته شد.

۲- در این مرحله فراوانی وقوع هر یک از حالات دوگانه (بارش و فقدان بارش) و تغییر حالات به هم محاسبه شد. تا براساس آنها محاسبات مرحله بعدی (محاسبه ماتریس احتمال تغییر حالت) به دست آید. برای بدست آوردن ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت می‌بایست در ابتدا ماتریس شمارش فراوانی محاسبه شود. برای مثال ماتریس شمارشی دو وضعیتی در زیر نشان داده شده است:

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

این ماتریس فراوانی تغییر وضعیت از خشکی به خشکی را با n_{11} ، تغییر خشکی به شرایط مرطوب را با n_{12} ، تغییر شرایط مرطوب به خشکی با n_{21} و تغییر از شرایط مرطوب به روز مرطوب n_{22} نشان می‌دهد.

شایان یادآوری مجدد است که برای ارزیابی نیکویی برازش این ماتریس فراوانی با فرایند دو حالت مارکوفی می‌بایست دو آزمون استقلال و آزمون علیه روند انجام شود. در آزمون استقلال فرض صفر (H_0) بر این ایده استوار است که سری‌ها مستقل هستند (یعنی داده‌ها از زنجیره مارکف مرتبه مورد نظر که در اینجا ۲ است، پیروی نمی‌کنند). (Hoaglin et al, 2006). این آزمون براساس جدول متقابل مقادیر انتقال مشاهده شده (n_{ij}) و تعداد انتقال مورد انتظار براساس فرض صفر (e_{ij}) بنا نهاده شده است. مقادیر مورد انتظار از روی مقادیر مشاهده شده انتقال با این فرض که جمع حاشیه‌ای مقادیر قابل انتظار مثل انتقالات مشاهده شده می‌باشد، حاصل می‌آید (Box et al, 2005). یعنی:

$$e_{ij} = \frac{n_{i+} n_{+j}}{n} \quad (2)$$

در رابطه فوق:

$n_{i+} = n_{i1} + n_{i2}$ (مجموع هر یک از سطرهاى ماتریس فراوانی)،

$n_{+j} = n_{1j} + n_{2j}$ (مجموع هریک از ستون‌های ماتریس فراوانی) است.

بنابراین آماره آزمون از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \quad (3)$$

χ_c^2 بحرانی (χ_c^2) با $(c-1), (r-1)$ درجه آزادی (در این جا c و r به ترتیب تعداد سطر و ستون‌های ماتریس است) و در سطح ۵ درصد خطا ($\chi_{0.05, df=(c-1), (r-1)}$) از جدول مربوطه به دست می‌آید. اگر $\chi_o^2 > \chi_c^2$ باشد فرض صفر در سطح معنی داری مورد نظر رد می‌شود. در حالت دیگر با استفاده از آماره p می‌توان درباره آماره قضاوت نمود. در روش p آماره کلاسیک با مختصری تغییر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع مقدار p برابر میزان احتمال به دست آوردن مقداری از ارزش نمونه است که حداقل به اندازه ارزش مورد نظری که از داده‌ها حاصل شده، دور و با این فرض که این ارزش درست باشد، تعریف می‌شود. بنابراین اگر مقدار p کمتر یا مساوی سطح معنی‌داری (α) باشد فرض صفر را رد نموده و در غیر این صورت می‌پذیریم. مقادیر p با ارزش‌های $0.01, 0.05$ تا 0.1 و بزرگ‌تر از 0.05 از نظر آماری به ترتیب خیلی معنی دار و گواه خیلی قوی، گواه مناسب و گواه غیر کافی علیه فرض صفر به شمار می‌آیند. در یک آزمون راست دامنه مقدار p بوسیله پیدا کردن سطح قسمت راست آماره آزمون به دست می‌آید. باین حال بایستی دقیقاً متوجه باشیم که در آزمون‌های دو دامنه، مقدار p دو برابر سطح ناحیه انتهایی است که به وسیله آماره آزمون محدود شده است.

از آن جا که زنجیره مارکوف نوعی داده‌های رتبه‌ای حاصل از داده‌های نسبی است برای آزمون علیه روند معقول‌تر است که روش رتبه‌ای به کار رود. یکی از روش‌های معمول، بکارگیری آزمون رتبه‌ای اسپیرمن است. کاربرد این روش در پژوهش‌های اقلیم شناختی بوسیله سازمان جهانی هواشناسی (۱۹۶۶ و ۲۰۰۰) پیشنهاد گردیده و در سطح وسیعی بکار گرفته شده است. در این شیوه ابتدا اختلاف بین رتبه هر مقدار (K_i) و ترتیب آن در سری (i) محاسبه می‌شود تا d_i به دست آید ($d_i = K_i - i$). سپس آماره اسپیرمن (r_s) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (4)$$

برای $n > 8$ مقدار r_s بوسیله فرمول (۵) از لحاظ معنی داری تعریف می‌شود. این آماره دارای توزیع تقریبی t استیودنت با $n-2$ درجه آزادی است و بوسیله t دو دامنه ارزیابی می‌شود. با توجه به حدود بحرانی،

فرض صفر (تصادفی بودن مقادیر) در ازای فرض مقابل (وجود روند در مقادیر) آزمون می‌شود (WMO, 1966 and WMO, 2000).

$$t_o = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^2}} \quad (5)$$

۳- شیوه‌های برآورد ماتریس احتمال به طرز تفکر پژوهشگر بستگی دارد و شامل روش‌های بیزی^۱، کمترین توان‌های دوم خطا (LSE)^۲، برآورد بیزی تجربی^۳ و حداکثر (بیشینه) درست‌نمایی^۴ است. ساده‌ترین روش برآورد احتمال که در این پژوهش به کار گرفته شده است، روش بیشینه درست‌نمایی است. بر مبنای تئوری کلاسیک، احتمال براساس فراوانی (بسامد)‌های نسبی در یک دوره آماری طولانی و به صورت درست‌نمایی بیشینه اتفاق افتادن رویداد مورد نظر تعریف می‌شود. این درست‌نمایی غالباً با p نشان داده می‌شود. برای مثال هر گاه آمار n روز را داشته باشیم و رویدادی معین m بار رخ دهد، آن گاه به $\frac{m}{n}$ فراوانی نسبی گفته می‌شود. فراوانی نسبی را می‌توان به عنوان برآوردی از ارزش احتمال (p) در نظر گرفت (Johnson and Bhattacharyya, 2006). بر این اساس نه تنها در اختصاص دادن احتمال به پیشامدها باید به فراوانی نسبی وقوع این مشاهده‌ها توجه داشت، بلکه وقتی احتمال پیشامدی در اختیار باشد این احتمال به عنوان حد فراوانی نسبی پیشامد تلقی خواهد شد. برای مثال منظور از اینکه احتمال بارش باران در روزی معین $\frac{3}{10}$ (۳۰٪) می‌باشد، آن است که در شرایط جوی روز مفروض از هر ۱۰۰ بار حدود ۳۰ بار بارندگی شده است (Akan and Houghtalen, 2003). ماتریس احتمال تغییر وضعیت (P) به روش درست‌نمایی بیشینه به صورت زیر به دست می‌آید (زارعی و شاهکار ۱۳۸۰):

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{n_{11}}{n_{1+}} & \frac{n_{12}}{n_{1+}} \\ \frac{n_{21}}{n_{2+}} & \frac{n_{22}}{n_{2+}} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

ماتریس فوق یک ماتریس تصادفی است. زیرا هر درایه آن نامنفی و مجموع درایه‌های آن در هر ردیف برابر ۱ است. درایه‌های این ماتریس با احتمال‌های تغییر وضعیت یک مرحله ای متناظرند. شایان توضیح است یکی از راه‌های معمول ارائه احتمال‌های تغییر وضعیت یک زنجیره مارکوف، به کمک ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است. احتمال تغییر وضعیت یک مرحله‌ای برابر احتمال رفتن از حالت i به j در یک دوره زمانی با آغاز از n بیان و به شکل P_{ij} نشان داده می‌شود. احتمال تغییر وضعیت یک مرحله‌ای، در نظریه و کاربرد زنجیره‌های مارکوف نقش کلیدی ایفا می‌کند. بنابراین ماتریس

۴- یافته‌ها

۴-۱- مشخصات توصیفی بارش

جدول (۱) آماره‌های توصیفی بارش ماهانه شهر تبریز را نشان می‌دهد. چند رابطه آشکار می‌توان در این جدول مشاهده نمود:

جدول ۱- مشخصات آماری بارش روزانه در شهر تبریز طی دوره آماری ۲۰۰۵-۱۹۵۱

ماه	تعداد روزهای بارانی طی ۵۵ سال	میانگین بارش روزانه (mm)	ضریب تغییرات	حداکثر بارش روزانه (mm)
ژانویه	۴۳۶	۰/۷۲	۳۴/۳	۲۲
فوریه	۴۲۲	۰/۸۳	۳۳/۲	۳۷
مارس	۶۱۰	۱/۳۵	۳۵/۵	۶۳
آوریل	۶۳۵	۱/۷۶	۴۲/۹	۵۳
مه	۵۹۷	۱/۴	۳۷/۸	۴۲
ژوئن	۲۶۸	۰/۵۶	۲۳/۳	۳۲
ژوئیه	۱۰۴	۰/۱۹	۱۳/۶	۳۰
اوت	۵۷	۰/۱۱	۱۰	۲۸
سپتامبر	۹۷	۰/۲۵	۱۵/۶	۲۳
اکتبر	۳۳۲	۰/۷۲	۲۷/۷	۲۶
نوامبر	۳۹۰	۰/۹۳	۳۱/۵	۳۷
دسامبر	۴۱۴	۰/۷۵	۳۲/۶	۲۹

اول اینکه بیشترین مقادیر میانگین بارندگی شهر تبریز و نیز بیشترین تعداد روزهای بارانی این شهر در ماه‌های بهار رخ داده است. علیچانی (۱۳۷۴) معتقد است که بارش‌های بهاری شمال غرب ایران حاصل فعالیت‌های همرفتی است. همچنین با افزایش میانگین بارندگی ضریب تغییرات آن نیز فزونی می‌یابد و دیگر اینکه ماه‌هایی که میانگین بارش بیشتری دریافت داشته‌اند، حداکثر بارندگی روزانه بیشتری را نیز تجربه نموده‌اند.

مشخصات سری زمانی بارندگی روزانه شهر تبریز برای دوره آماری ۲۰۰۵-۱۹۵۱ در شکل ۱ نشان داده شده است. در شکل ۱ الف می‌توان دید که میانگین بارش روزانه از اول ژانویه تا حدود صد و بیستین روز از سال میلادی (سی‌ام آوریل برابر با نهم اردیبهشت) میانگین بارش رو به افزایش است. از آن پس تا حدود دویست و چهل و سومین روز سال (پایان ماه اوت مصادف با هشتم شهریور) بارش

تغییر وضعیت یک مرحله ای فرایند مارکوف دو حالتی را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (7)$$

۳- شایان توضیح است که همه توان‌های ماتریس احتمال (P^k) نیز ماتریس تصادفی خواهند بود. همچنین از یک مقدار به بعد با افزایش k هیچ تغییری در ماتریس احتمال ایجاد نمی‌شود و مقادیر ردیف‌های متناظر در ماتریس یکسان و برابر خواهند بود. در این حالت گفته می‌شود که ماتریس به ایستایی (پایایی) رسیده است. این ماتریس احتمال وقوع را ماتریس ایستا (پایا) گویند. از آنجا که ردیف‌های این ماتریس برابرند می‌توان این ماتریس را به شکل یک بردار و با π_j نشان داد. در واقع اگر $\lim_{k \rightarrow \infty} P^k = \Pi$ ماتریسی مانند Π با سطرهای یکسان و درایه‌های مخالف صفر ایجاد می‌شود و اگر هر یک از سطرهای یکسان ماتریس حدی Π با بردار سطری π نشان داده شود، عناصر π یک توزیع احتمال را تشکیل می‌دهد. π بردار احتمال حالت پایا و درایه‌های آن به احتمال‌های حالت پایا موسوم‌اند (Chinlar, 1380). بردار احتمال حالت پایا نشان می‌دهد که درمدت طولانی احتمال وقوع مثلاً روز بارانی و روز فاقد بارش چقدر است.

بعد از محاسبه احتمال پایا (ایستا) که بیانگر تغییر وضعیت بارش در درازمدت است، دوره بازگشت هر یک از تغییر وضعیت‌ها محاسبه شد. دوره بازگشت (T_j) در واقع عکس احتمال است و آن متوسط تعداد روزهایی است که بین وقوع دو حادثه مشابه وجود دارد و به شکل $T_j = \frac{1}{p_{ij}}$ بیان می‌شود (Akan and Houghtalen, 2003). برای مثال اگر دوره بازگشت رخدادی با احتمال وقوع $۰/۲۵$ ، ۴ سال باشد یعنی به طور متوسط هر ۴ سال یک بار اتفاق می‌افتد. همچنین منظور از باران ۱۰۰ ساله باران‌هایی است که احتمال وقوع بارانی مشابه با آن یا بیشتر یک درصد است. با تعمیم این تعریف بر زنجیره‌های مارکوف، متوسط زمان لازم برای بازگشت زنجیره به حالت اولیه را نیز زمان بازگشت می‌گویند. در صورتی که وضعیت z برقرار باشد، رابطه ساده امید ریاضی دوره بازگشت و احتمال پایا را می‌توان به شکل زیر نشان داد (Higenz and Macnalti, 1379):

$$E(T_j) = \frac{1}{\pi_j} \quad (8)$$

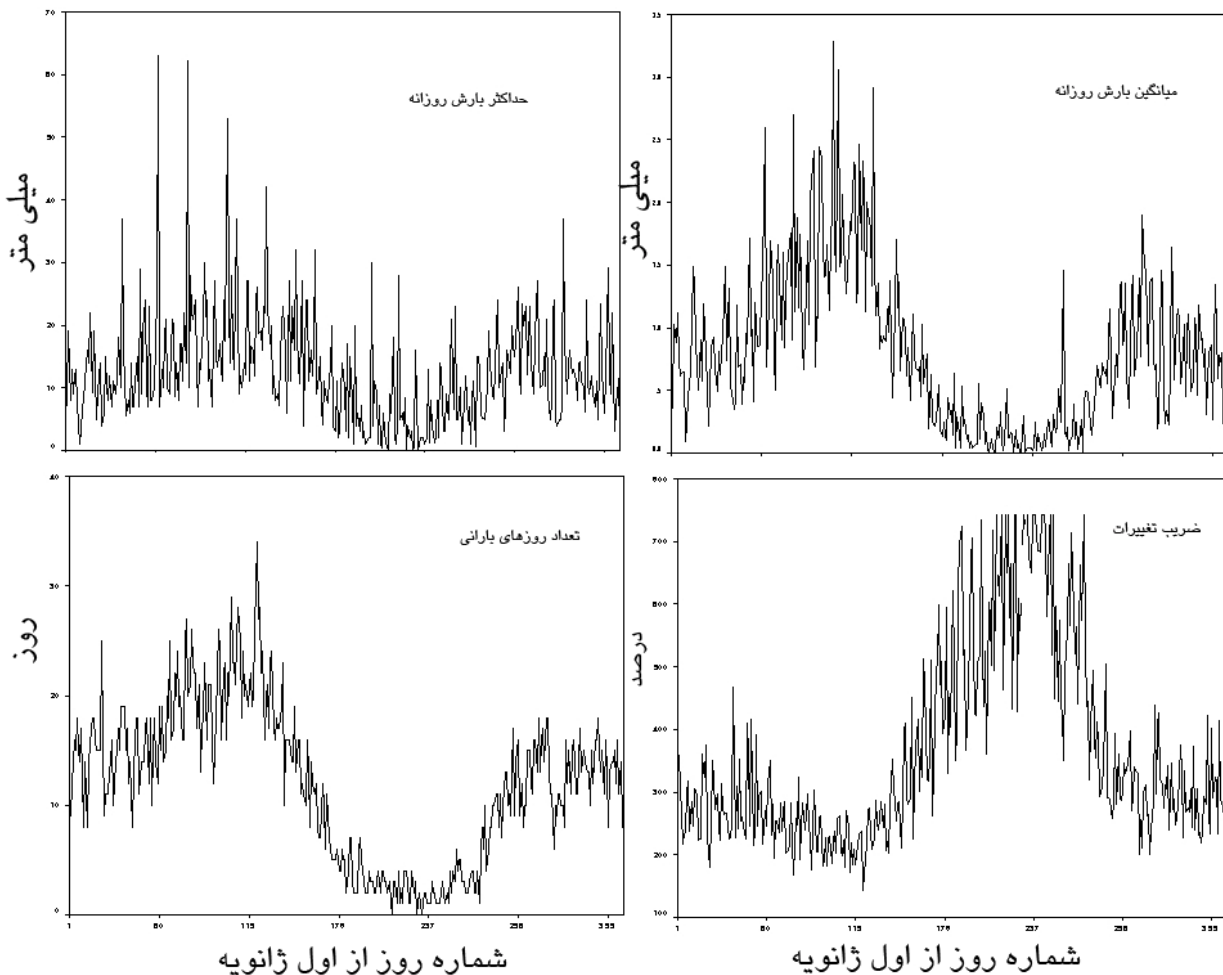
در رابطه فوق $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s)$ بردار احتمال حالت پایایی زنجیره و T_j دوره بازگشت به حالت z را نشان می‌دهد.

کاهش یافته است. از هشتم شهریور آغاز اوج گیری مجدد بارندگی تا پایان اکتبر (هشتم آبان ماه) است. بعد از این تاریخ تا اول ژانویه میانگین بارندگی مجدداً کاهش یافته و چرخه تکرار می‌شود.

در شکل ۱ ب دیده می‌شود که دوره وقوع بارش‌های بیشینه روزانه در زمان اوج گیری بارندگی‌ها بویژه طی بارش‌های زمستانه - بهاره است. اگرچه از این قبیل مقادیر فرین در بارش‌های پاییزه نیز دیده می‌شود اما فراوانی و شدت آنها در بارش‌های زمستانه - بهاره بارزتر است.

به خوبی می‌توان دید که ضریب تغییرات بارش (شکل ۱ ج) با افزایش بارندگی کم شده و با کاهش آن فزونی می‌یابد. از این رو

بیشترین ضریب تغییرات در دوره کم بارش تابستانه است. این وضعیت بیانگر عدم امکان اعتماد بر بارش‌های اتفاقی فصل تابستان تا اوایل پاییز است. از طرف دیگر چنان که در شکل ۱ د نیز نشان داده شده است فزونی روزهای بارانی در روزهای پربارش گویای توزیع افزون تر بارندگی در زمان نسبت به روزهای کم باران است. به عبارت دیگر بارش‌های روزهای تابستانه از ضریب تمرکز بالایی برخوردارند، درحالی که ضریب پراکنش زمانی در روزهای پرباران بیش‌تر است. این امر تفاوت شدت بارندگی‌های دو دوره کم و پرباران را بیان می‌دارد. رابطه آماری مشخصات توصیفی مورد بحث در جدول ۲ به وضوح نشان داده شده است. مقادیر ارائه شده در این جدول در هر سطح دلخواه معنی‌دار است.



شکل ۱- مشخصات توصیفی بارش روزانه شهر تبریز طی دوره ۱۹۵۱-۲۰۰۵

جدول ۲- ماتریس همبستگی بارش روزانه شهر تبریز

روزهای بارانی	میانگین بارش (mm)	ضریب تغییرات	حداکثر بارندگی (mm)
روزهای بارانی	۰/۸۳۱	-۰/۸۵۱	۰/۵۰۳
میانگین بارش		-۰/۶۶	۰/۷۶۶
ضریب تغییرات			-/۲۸
حداکثر بارندگی			

جدول ۳- جدول دو بعدی مقادیر مشاهده شده و مقادیر مورد

انتظار ماتریس فراوانی دو حالت			
	D	W	Σ
D	۱۳۴۲۰ (۱۲۲۹۹/۴۱)	۲۲۹۳ (۳۱۴۱۳/۵۹)	۱۵۷۱۳
W	۲۲۹۳ (۳۴۱۳/۵۹)	۲۰۶۸ (۹۴۷/۴۱)	۴۳۶۱
Σ	۱۵۷۱۳	۴۳۶۱	۲۰۰۷۴

۵- مشخصات احتمالی بارش

۱-۵- تعیین مرتبه تغییر وضعیت مارکوفی

وضعیت بارش روزانه شهر تبریز با فرض دو حالت بودن در ماتریس فراوانی زیر مرتب شده است.

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13420 & 2293 \\ 2293 & 2068 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (۹)$$

در ردیف اول این ماتریس عدد ۱۳۴۲۰ گویای تعداد تغییر وضعیت از روز خشک به روز خشک ($D \rightarrow D$) بعدی است. در واقع طی ۲۰۰۷۴ روز آمار موجود ۱۳۴۲۰ روز، روزهای خشکی است که بعد از روز خشک (فاقد بارش) رخ داده است. عدد ۲۲۹۳ در ردیف اول دفعات روز بدون بارش، پس از یک روز بارندگی ($D \rightarrow W$) را نشان می‌دهد. در ردیف دوم ماتریس تبدیل وضعیت از روز بارانی به روز خشک و بارانی است که به ترتیب ۲۲۹۳ و ۲۰۶۸ روز بوده است.

دو پرسش اساسی درباره ماتریس فوق این است که اولاً آیا فراوانی حالات مستقلند یا از زنجیره مارکوف دو حالتی پیروی می‌کنند. دوم اینکه آیا براساس فرض صفر داده‌ها فاقد روند هستند ($H_0: \rho_s = 0$) یا براساس فرض مقابل از روند خاصی پیروی می‌کنند ($H_A: \rho_s \neq 0$). در دنباله بحث دو آزمون جهت ارزیابی این دو پرسش انجام خواهد شد.

چنان که اشاره شد از آزمون‌های بسیار معتبر جهت ارزیابی ماتریس تغییر حالت مارکوفی، آزمون χ^2 است. جدول زیر جدول متقاطع جهت انجام آزمون را نشان می‌دهد. اعداد بالایی مقادیر مشاهده شده (O) و اعداد داخل پرانتز مقادیر مورد انتظار (E) تحت فرض صفر است.

آماره آزمون به شرح زیر به دست آمد:

$$\chi_o^2 = ۱۰۲/۰۹۶ + ۳۶۷/۸۵۹ + ۳۶۷/۸۵۹ + ۰/۰۱۳ = ۲۱۶۳/۲۳۸$$

براساس آزمون مربوطه ارزش آماره p (p -Value) در هر سطحی معنی دار است ($p=0$). همچنین براساس مقایسه مقادیر بحرانی (χ_c^2) و مقادیر مشاهده شده (χ_o^2)، معلوم شد که در هر سطح دلخواه شواهد کافی برای پذیرش فرض صفر (استقلال داده‌ها و عدم پیروی از زنجیره مارکوف دو حالت) وجود ندارد. این بدان معنی است که فراوانی حالات از زنجیره مارکوف دو حالتی پیروی می‌کند.

براساس ضریب همبستگی اسپیرمن که بر ارزش‌های زنجیره مارکوفی - زمان محاسبه گردید $r_s = 0.019$ به دست آمد. با توجه به سطح خطای ۰/۰۱، شواهد کافی برای رد فرض صفر ($H_0: \rho_s = 0$) وجود ندارد و داده‌ها فاقد روند است. این آزمون همچنین ایستایی زنجیره را نشان می‌دهد. در واقع قضیه فوق گویای این امر است که فراوانی‌ها با زمان تغییر زیادی ندارند.

بنابراین با توجه به تعداد تغییر وضعیت‌ها به حالت‌های دیگر و نیز با عنایت به تعریف احتمال، ماتریس احتمال تغییر حالت از ماتریس فراوانی به شرح زیر حاصل شد:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.85 & 0.15 \\ 0.53 & 0.47 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (۱۰)$$

اندیس سطری با حالت کنونی و اندیس ستونی با حالت بعدی متناظر است. برای مثال، این که فرایند در یک مرحله از خشک به خشک ($D \rightarrow D$) انتقال یابد برابر با $P_{(D \rightarrow D)} = 0.85$ است. در صورتی که احتمال انتقال از حالت خشک به حالت بارانی ($D \rightarrow W$) در یک مرحله برابر ۰/۱۵ است. شایان ذکر است که برای فرایندهای با حالت‌های بیشمار ماتریس تغییر وضعیت می‌تواند دارای ابعاد نامتناهی باشد.

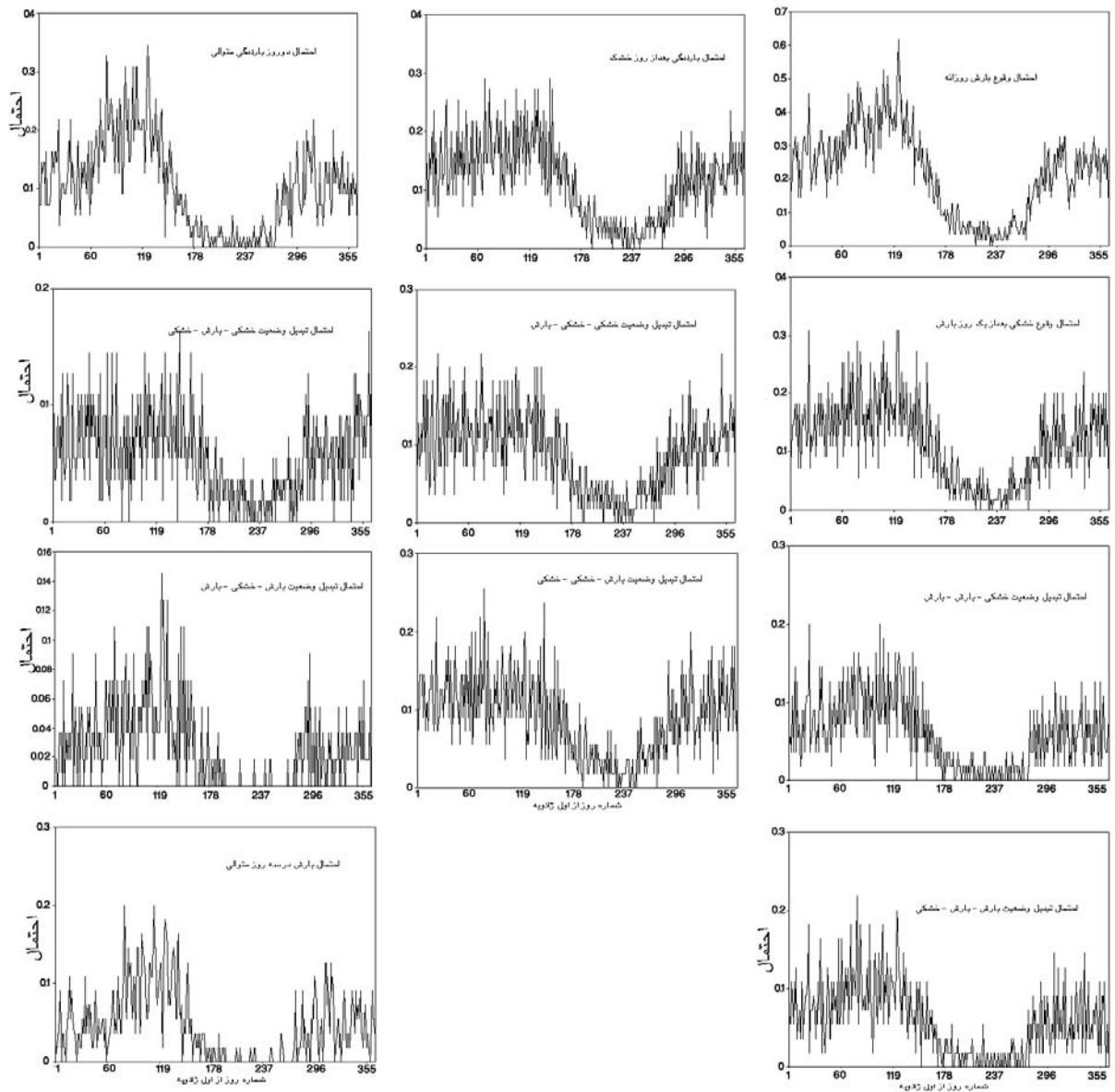
(۱۲) محاسبه احتمالی را که یک زنجیره مارکوف در زمان‌های ۱، ۲، ...، n

$$P_{[W \rightarrow W]} P_{[W \rightarrow W]} P_{[W \rightarrow W]} = (0.47)(0.47)(0.47) = 0.104$$

وارد حالت‌های $S_{(1)}$ ، $S_{(2)}$ ، ...، $S_{(n)}$ شود با این فرض که زنجیره از حالت $S_{(0)}$ آغاز کرده است، در نظر می‌گیریم. دنباله‌ای از حالت‌ها که بوسیله آنها فرایندی می‌تواند حرکت کند، مسیر فرایند نامیده می‌شود. احتمال یک مسیر، دقیقاً برابر حاصلضرب احتمال‌های تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است:

$$p[S_{(0)} \rightarrow S_{(1)}] p[S_{(1)} \rightarrow S_{(2)}] \dots p[S_{(n-1)} \rightarrow S_{(n)}] \quad (11)$$

برای مثال احتمال تغییر وضعیت از بارش به بارش و مجدداً بارش (یعنی سه روز متوالی بارندگی) به صورت زیر است:



شکل ۲- احتمال تغییر وضعیت صفر، یک و دومرحله‌ای بارش روزانه شهر تبریز

۵-۲- محاسبه احتمال پایا

چنان که از مبحث قبل می‌توان استنباط نمود، تغییر حالات پرشماری می‌توان برای زنجیره مارکوف تصور و برآورد نمود. اما جمع بندی این تغییر حالات در یک عبارت کلی می‌تواند تصویری ساده و روشن را ارائه نماید. برای بدست آوردن عبارت کلی احتمال‌های دو مرحله‌ای فهرستی از مسیرهای ممکن را که فرایند در رفتن از i به j در دو مرحله می‌تواند دنبال کند، متصور می‌شویم. این مسیرها برای مثال $i \leftarrow s \leftarrow j$ است. با محاسبه احتمال همه این مسیرها و جمع نتایج $P_{(s \rightarrow j)}$ حاصل می‌شود. بنابراین:

در این فرمول جمع‌یابی روی حالت‌های ممکن فرایند انجام شده است. این عبارت مربع ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای است و به ماتریس تغییر وضعیت دو مرحله‌ای موسوم است. ماتریس P^4 را ماتریس تغییر وضعیت چهار مرحله‌ای می‌نامند.

$$P_{(j \rightarrow i)}^2 = \sum_s P_{(i \rightarrow s)} P_{(s \rightarrow j)}$$

۵-۳- برآورد تداوم بارش

از کاربردهای تکنیک زنجیره مارکوف، برآورد دوره برگشت بارش‌های با تداوم m روزه است. منظور از تداوم بارش، تعداد روزهایی متوالی است که بارش در آن رخ داده باشد. برای مثال تداوم دو روزه بارش، به معنی ریزش باران در دو روز متوالی است. ولی قبل از روز اول و بعد از روز دوم بارندگی وجود نداشته باشد. دوره برگشت مزبور براساس رابطه زیر به دست می‌آید (Berger and Goossens, 1983):

$$T_m = \frac{1}{p^{m-1}(1-p)} \quad (14)$$

در اینجا p احتمال بارش در ماه مورد نظر (جدول ۳) و m ، دوره بارانی مورد نظر طی m روز، T_m دوره بازگشت بارش m روزه است. باقرار دادن مقادیر مختلف از ۲ تا ۵ به ازای m ، طول دوره بارش با تداوم‌های ۲ تا ۵ روز برای هرماه محاسبه شد (بارش یک روزه نیز در جدول ۳ نشان داده شده است). حاصل این محاسبات در شکل ۳ ارائه گردیده است. توجه کنید که مقیاس دوره‌های بازگشت در چهار فصل متفاوت است. چنان که دیده می‌شود، بارش‌های چند روزه عمدتاً در ماه‌های فصل بهار از دوره بازگشت کوتاه تری برخوردارند. برای مثال بارش‌های دو روزه در فصل بهار با دور بازگشت حدود ۴ روز، درحالی که برای ماه اوت با دوره بازگشت حدود ۳۸ روز مشخص می‌شوند. ماه‌های فصل زمستان نیز با تداوم بارش دوروزه حدود ۵ روز در مقام دوم احتمال بارش‌های دو روزه است. اختلاف مزبور در بارش‌های ۳، ۴ و ۵ روزه بارزتر است.

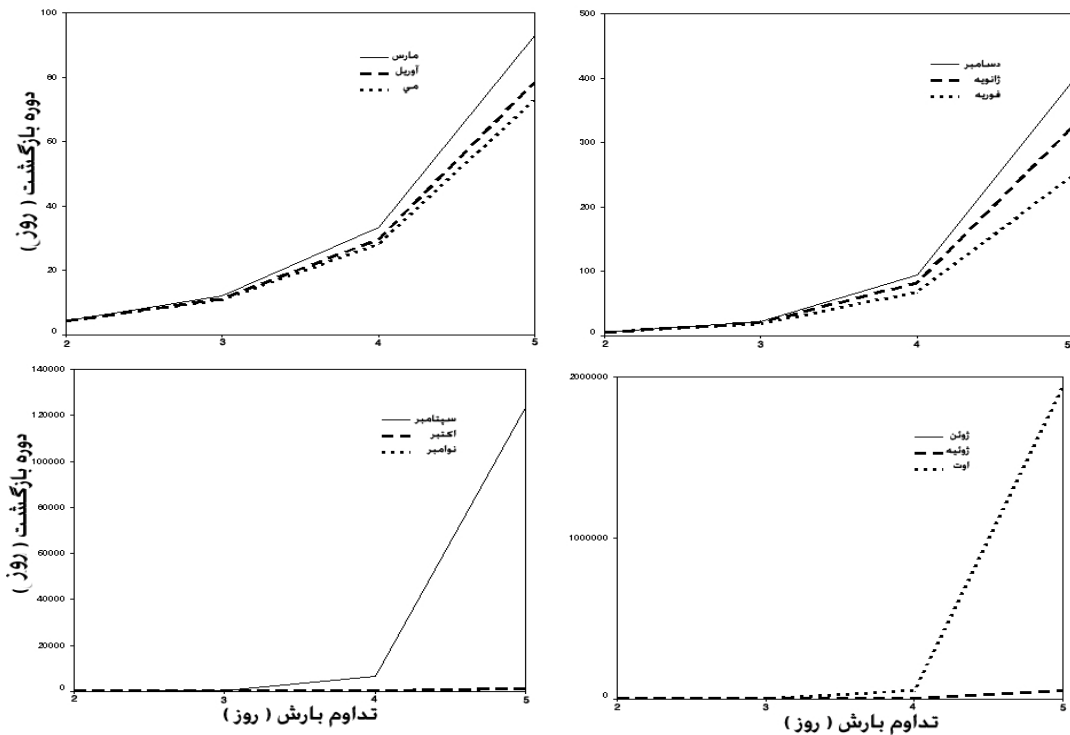
احتمال‌های تغییر وضعیت k مرحله‌ای است که از به توان k ام رساندن ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای بدست می‌آید. برای ماتریس تغییر وضعیت k مرحله‌ای وقتی k بزرگ می‌شود پدیده جالب توجهی رخ می‌دهد. در این حالت همه سطرهای ماتریس تغییر وضعیت باهم برابر می‌شوند به طوری که اگر به توان رساندن ماتریس تغییر وضعیت را به توان‌های بالاتر ادامه دهیم، درایه‌ها هیچگونه تغییری نخواهند نمود. برای روزهای بارانی شهر تبریز ماتریس تغییر وضعیت k مرحله‌ای در مرحله نهم و تا ۴ رقم اعشار به این شرایط رسید. یعنی:

$$P^9 = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & W \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ W \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.7794 & 0.2206 \\ 0.7794 & 0.2206 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (13)$$

شرایط بدون توجه به خانه آغازی، بعد از تقریباً ۹ وضعیت با احتمال‌های ۰/۷۷۹۴ و ۰/۲۲۰۶ به شرط حالت پایا می‌رسد. درواقع بردار سطری این ماتریس گویای احتمال وقوع وضعیت بلند مدت بارندگی است.

جدول ۳- احتمال پایای روزهای توام با بارش و فاقد بارندگی در ماه‌های مختلف برای ایستگاه تبریز

ماه	ژانویه	فوریه	مارس	آوریل	مه	ژوئن	ژوئیه	اوت	سپتامبر	اکتبر	نوامبر	دسامبر
احتمال بارش	۰/۲۵۳۳	۰/۲۷۲۷	۰/۳۶	۰/۳۷۸۴	۰/۳۸۶۷	۰/۳۵۰۶	۰/۰۶۶۷	۰/۰۲۷	۰/۰۵۴۱	۰/۰۷۹۱	۰/۰۸۲۹	۰/۰۲۴
احتمال عدم بارش	۰/۷۴۶۷	۰/۷۲۷۳	۰/۵۴	۰/۶۲۱۶	۰/۶۱۳۳	۰/۶۴۹۴	۰/۹۳۳۳	۰/۹۷۳	۰/۹۴۵۹	۰/۸۲۰۹	۰/۸۱۷۱	۰/۷۶



شکل ۳- دوره‌های بازگشت بارش‌های ۲ تا ۵ روزه برای ایستگاه تبریز

۶- نتیجه

فصل بهار صعود ناشی از همرفت دامنه‌ای را تجربه می‌کند. در این موقع از سال هوای مرطوب حاصل از گسترش زمستانه بادهای غربی به این منطقه، حتی پس از پسروی بادهای غربی در آنجا باقی می‌ماند. این هوای مرطوب، در بهار، بر اثر تابش زیاد خورشید بر دامنه‌های آفتاب گیر و ایجاد ناپایداری، صعود و ایجاد بارش می‌کند. این مساله سبب شده است که فصل بهار پر باران‌ترین فصل سال به شمار آید. در این نوع صعود، بارندگی پراکنده و بی‌نظم است. بدین دلیل بارش ماهانه این فصل از ضریب تغییرات بالایی (حدود ۳۵ تا حدود ۴۳ درصد) برخوردار است. از این رو حداکثر بارش‌های روزانه نیز در این فصل رخ داده است. باین وصف تعداد روزهای بارانی ماه‌های فصل بهار گویای این امر است که توزیع بارش از بقیه فصول بیشتر و تمرکز زمانی کمتری دارد. چراکه تعداد روزهای بارانی این فصل بیش از فصول دیگر رخ می‌دهد.

با استفاده از روش زنجیره مارکوف و با به کارگیری آمار بارش روزانه بیش از نیم قرن شهر تبریز و نیز براساس آزمون‌های معتبر آماری، معلوم شد که زنجیره مارکوف دو حالت برآزش مناسبی بر حالت‌های بارش روزانه این شهر دارد و نیز برآوردها نشان داد که روزهای بارانی با احتمال وقوع حدود ۰/۲۲۰۶ رخ می‌دهند. بنابراین دوره بازگشت بارندگی طی حدود ۴ روز است. از آنجا که این مقدار، متوسطی برای طول سال است، احتمال وقوع روزهای توام با بارندگی برای تمامی ماه‌ها محاسبه شد. احتمال روزهای توام با بارندگی از ماه‌های فصل زمستان به سمت ماه‌های فصل بهار از افزایش قابل توجهی برخوردارند. در حالی که به سمت تابستان این روزها کاسته می‌شود. بیش‌ترین و کم‌ترین احتمال روزهای توام با بارش به ترتیب مربوط به ماه‌های اوت (۰/۰۲۷) و مه (۰/۳۸۶۷) است.

اگرچه در فصل زمستان به دلیل شدت، فراوانی و نفوذ بیشتر بادهای غربی به ایران، انتظار می‌رود که تبریز بارش بیشتری را نسبت به ماه‌های بهار تجربه نماید، اما به دلیل نفوذ توده‌های هوای سرد و پایدار با گنجایش کم رطوبتی از منطقه قفقاز، باران کم‌تری در این فصل رخ می‌دهد. لذا هجوم گاه و بی‌گاه توده‌های هوایی سرد قفقاز مانع از برتری بارش زمستانه نسبت به بارش بهار می‌شود.

دوره بازگشت روزهای توام با بارندگی برای تداوم مختلف (۲ تا ۵ روز) شهر تبریز طی دوازده ماه سال محاسبه شد. براساس یافته‌های توصیفی این پژوهش بارش در ماه‌های بهار نسبت به ماه‌های دیگر نه تنها با احتمال بیشتری رخ می‌دهد بلکه تداوم آن نیز افزون‌تر است. دلیل اصلی این امر را می‌توان در فرایند همرفت دامنه‌ای جستجو کرد. شهر تبریز همچون دیگر نواحی شمال غربی ایران در

مشکانی، م. (۱۳۶۳)، "بررسی احتمال تواتر روزهای خشک بابلسر از دیدگاه بیز تجربی" مجله علوم آب شماره ۳.

هیگنز، ج. ج. و مک نالتی، سالی کلر (۱۳۷۹)، "مفاهیم احتمال و مدل‌بندی تصادفی". ترجمه علی مشکانی. مشهد: انتشارات دانشگاه فردوسی.

Akan, A.Osman and Houghtalen, Robert.J., (2003), *Urban Hydrology, Hydraulics, and Storm Water Quality*, John Wily & Sons.Inc.,U.S.A .

Benzi .G , A.Parisi. and A. Sutura and A. Vulpiani, (1983), "A theory of Stochastic resonance in climatic change", *Siam J., Appl.Math.*,43, pp. 565-578.

Berger, A. and Goossens, C.H.R., (1983), "Persistence of wet and dry spells at Uccle (Belgium)", *J. Climatol.*, 3, pp. 21-34.

Box . George E P, Hunter Stuart J. and Hunter William G., (2005), *Statistics for Experimenters*, John Wily & Sons.Inc.,U.S.A .

Buishand, T.A. (1978), "Some remarks on the use of daily rainfall models", *J. Hydrol.*, 36, pp. 295-308.

Burgers. G. and D. B. Stephenson, (1999), The Normality of Elnino, *Geophys.Res. Lett.*26, pp. 1027-1030.

Douguedroit, A. (1987), "The variations of dry spells in Marseilles from 1865 to 1984", *J. Climatol.*, 7, pp. 541-551.

Gibbs, W.J. and J.V. Maher, (1967), "Rainfall deciles as drought indicators" *Bureau of Meteorology Bulletin* No. 48, Commonwealth of Australia, Melbourne.

Hoaglin, David C. Mosteller, Frederick and Tukey , John W.(edit) (2006), *Exploring Data Table, Trends, and Shapes*, John Wily & Sons.Inc.,U.S.A .

Johnson. Richard. A and Bhattacharyya. Gouri.K. (2006), *Statistics: Principles and Methods*. John Wiley & Sons.INC., U.S.A.

Martin-Vide, Javier and Gomez, Linda (1999), "Rigionalization of Peninsular Spain Based on the Length of Dry Spells. " *Int.J. Climatol.*19, pp. 537-555

Moon. Eull.S, Boom Ryoo. S., Gi Kwon. J. (1994), "A Markov Chain Model for Daily Precipitation Occurrence in South Korea". *Inter.Jour.Climato.*

WMO. (1966), *Climate Change*. Technical Note No 79.

WMO, (2000), *Detecting Trend and Other Change in Hydrological Data*, WMO/ TD- NO.1013.

تحلیل احتمالی تقارن سیستم‌های باران‌زا و تداوم آنها تصویری روشن تر از وضعیت بارشی منطقه ارائه نماید. از آنجا که این مقوله از حوصله این مقاله خارج است به عنوان پیشنهاد این پژوهش ارائه می‌گردد. بدیهی است که دانسته‌های حاصل از آن و نیز تلفیق آنها با نتایج این پژوهش در برنامه ریزی و مدیریت منابع آب شهر تبریز و نیز به لحاظ کاربری کشاورزی آن قابل تامل و از اهمیت شایان توجهی برخوردار خواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

- 1- Bayes
- 2- Least Squares Error
- 3- Empirical Bayes
- 4- Maximum Likelihood

مراجع

حجازی‌زاده، ز. و شیرخانی، ع. (۱۳۸۴)، "تحلیل و پیش‌بینی آماری خشکسالی و دوره‌های خشک کوتاه مدت در استان خراسان" مجله پژوهش‌های جغرافیایی. شماره ۵۲ سال سی‌وهفتم.

جعفری بهی، خ. (۱۳۷۸)، "تحلیل آماری دوره‌های تر و خشک بارندگی در چند نمونه اقلیمی ایران با استفاده از زنجیره مارکف" پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد هواشناسی کشاورزی. دانشگاه تهران. دانشکده کشاورزی.

چینلار، ا. (۱۳۸۰)، "آشنایی با فرایندهای تصادفی" ترجمه غلامحسین شاهکار و ابوالقاسم بزرگ‌نیا. تهران: موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

زارعی، ح. و شاهکار، غ. (۱۳۸۰)، "بررسی احتمال تواتر روزهای بارانی و خشک مناطق خرمدره- ارداک و زشک". سومین سمینار احتمال و فرایندهای تصادفی. دانشگاه اصفهان ۷ و ۸ شهریور ماه ۱۳۸۰

سازمان هواشناسی کل کشور، آمار بارش روزانه شهر تبریز طی ۱۹۵۱-۲۰۰۵

علیجانی، ب. (۱۳۷۴)، "آب و هوای ایران" تهران: انتشارات پیام‌نور. علیزاده، ا. (۱۳۸۵)، "اصول هیدرولوژی کاربردی". مشهد: انتشارات دانشگاه امام رضا.

غیور، ح. و مسعودیان، ا. (۱۳۷۶)، "بزرگی، گستره و فراوانی خشکسالی‌ها در ایران". فصلنامه تحقیقات جغرافیایی شماره ۴۵.