



## Determination of Potential Evapotranspiration Using the Fuzzy Regression Method

M. Shayannejad<sup>1</sup>, S. J. Sadatinejad<sup>2</sup>  
and H. Fahmi<sup>3</sup>

### Abstract

Potential evapotranspiration ( $ET_0$ ) rates are needed for irrigation scheduling.  $ET_0$  rates are commonly from weather parameters. The Penman-Monteith, is now accepted for computation of  $ET_0$ . It requires several input parameters, some of which have no actual measurements but are estimated from measured weather parameters. In this study, the suitability of fuzzy regression was examined for estimating daily potential evapotranspiration with grass reference crop and compared with Artificial Neural Networks (ANN) and Penman-Monteith methods. The daily climatic data of the Ekbatan station in Hamadan, including maximum and minimum temperature, maximum and minimum relative humidity, wind speed and sunny hours are introduced as input data and  $ET_0$  as output data.  $ET_0$  values estimated from the fuzzy regression method were compared with direct  $ET_0$  measurements from lysimeters, and with  $ET_0$  estimations obtained using the Penman-Monteith equation and the ANN method. The estimated  $ET_0$  values from a fuzzy regression model using five input parameters, including maximum and minimum temperature, mean relative humidity, wind speed and sunny hours were obtained with  $RMSE=0.69\text{mm/day}$ ,  $R^2=0.88$ . The estimated  $ET_0$  values from an artificial neural networks model using the same input parameters were obtained with  $RMSE=0.74\text{mm/day}$ ,  $R^2=0.84$ . The estimated  $ET_0$  values from Penman-Monteith model were obtained with  $RMSE=1.21\text{mm/day}$ ,  $R^2=0.84$ . Thus, in this study the fuzzy regression is the best method.

**Keywords:** Evapotranspiration, Fuzzy regression, Penman-Monteith

## تعیین تبخیر - تعرق بالقوه با استفاده از روش رگرسیون فازی

محمد شایان نژاد<sup>۱</sup>، سید جواد ساداتی نژاد<sup>۲</sup>  
و هدایت فهیمی<sup>۳</sup>

### چکیده

شدت تبخیر - تعرق بالقوه برای برنامه‌ریزی آبیاری مورد نیاز است که معمولاً بر اساس روش‌هایی مبتنی بر داده‌های اقلیمی تخمین زده می‌شود. در حال حاضر روش پنمن-مانتیس یک روش قابل قبول برای تخمین تبخیر - تعرق بالقوه است. بعضی از پارامترهای این روش را نمی‌توان بطور دقیق اندازه‌گیری نمود. در نتیجه با استفاده از پارامترهای اقلیمی تخمین زده می‌شوند. در این مقاله، کارایی روش رگرسیون فازی در تخمین تبخیر - تعرق بالقوه روزانه (با گیاه مرجع چمن) و مقایسه آن با روش‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی و پنمن-مانتیس مورد بررسی قرار گرفته است. برای این کار از اطلاعات اقلیمی و لایسیمتری ۵ ساله ایستگاه هواشناسی اکباتان واقع در ۱۰ کیلومتری شهر همدان استفاده شده است. پارامترهای مورد استفاده شامل دمای حداقل و حداکثر هوا، دمای متوسط هوا، رطوبت حداقل و حداکثر هوا، ساعات آفتابی و سرعت باد در مقیاس روزانه می‌باشد. تبخیر - تعرق بالقوه بدست آمده از لایسیمتر موجود در آن ایستگاه، به عنوان خروجی هر روش در نظر گرفته شده است. روش رگرسیون فازی با پنج پارامتر ورودی شامل دمای حداقل و حداکثر هوا، رطوبت نسبی متوسط هوا، ساعات آفتابی و سرعت باد، دارای ضریب تعیین ۰/۸۸ و خطای  $RMSE=0.69$  میلی‌متر در روز بود. در حالی که روش شبکه‌های عصبی مصنوعی دارای ضریب تعیین ۰/۸۴ و خطای  $RMSE=0.74$  میلی‌متر در روز و روش پنمن-مانتیس دارای ضریب تعیین ۰/۸۴ و خطای  $RMSE=1.21$  میلی‌متر در روز بود. بنابراین روش رگرسیون فازی بهترین روش جهت تخمین تبخیر - تعرق بالقوه نتیجه‌گیری شد.

**کلمات کلیدی:** تبخیر - تعرق بالقوه، رگرسیون فازی، پنمن-مانتیس

1- Assistant Professor, Department of Irrigation, College of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran, Email: shayannejad@yahoo.com  
2- Assistant Professor, Department of Natural resources, College of Agriculture, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.  
3- Head of Planning Division, Water Resources Management Organization, Iran.

۱- استادیار گروه مهندسی آب دانشگاه شهرکرد

۲- استادیار گروه مهندسی منابع طبیعی دانشگاه شهرکرد

۳- مدیر بخش برنامه ریزی سازمان مدیریت منابع آب ایران

پنمن نمود و معادله‌ای تحت عنوان معادله پنمن - مانتیس ارائه نمود. بسیاری از دانشمندان مانند Allen (1986) اعتبار این معادله را بررسی کردند. همچنین Jensen (1990) و همکاران بیست روش تخمین تبخیر - تعرق را نسبت به نتایج لایسمتر در یازده ایستگاه در نقاط مختلف جهان با اقلیم‌های متفاوت مقایسه کرده و نتیجه گرفتند که در همه اقلیم‌ها روش پنمن - مانتیس بهترین روش محسوب شده و مرتبه سایر روش‌ها با توجه به اقلیم متفاوت بود.

علاوه بر روش‌های مشهور فوق، در سال‌های اخیر از روش‌های شبکه عصبی مصنوعی و منطق فازی و یا ترکیبی از آن‌ها برای تخمین تبخیر - تعرق استفاده شده است. در زیر به نمونه‌هایی در این زمینه اشاره می‌شود:

Bruton (2000) و همکاران با استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی، تبخیر روزانه از تشت را تخمین زدند. تعداد داده‌های مورد استفاده ۲۰۴۴ بوده که از شهرهای مختلف جهان مانند رم در سال‌های ۱۹۹۲ تا ۱۹۹۶ جمع آوری شده است. داده‌های ورودی عبارت بوده از: بارندگی، درجه حرارت، رطوبت نسبی، تابش خورشیدی و سرعت باد. میزان تبخیر از تشت که از روش شبکه‌های عصبی مصنوعی محاسبه شده دارای کمترین خطا نسبت به روش‌های رگرسیون چندگانه خطی مانند روش پرستلی-تیلور بوده و خطایی برابر با ۱/۱۱ میلی‌متر در روز داشته است. Odhiambo(2001,a) و همکاران روش منطق فازی را برای تخمین تبخیر - تعرق بالقوه گیاه مرجع بکار برده و نتایج را با روش‌های پنمن-مانتیس و هارگریوز-سامانی مقایسه کردند. در این مطالعه دو مدل منطق فازی استفاده شده است. در مدل اول از تابش خورشیدی و رطوبت نسبی هوا و در مدل دوم علاوه بر دو پارامتر مذکور، سرعت باد نیز به عنوان داده‌های ورودی منظور شده است. خطای استاندارد با مقایسه داده‌های لایسمتری برای مدل اول، مدل دوم، پنمن-مانتیس و هارگریوز-سامانی بترتیب ۰/۷۳، ۰/۵۴، ۰/۵۰ و ۰/۶۶ میلی‌متر در روز بدست آمد. این نتایج نشان داد که روش منطق فازی با سه پارامتر ورودی دارای خطایی نزدیک روش پنمن-مانتیس است. با این تفاوت که در روش پنمن-مانتیس داده‌های ورودی بیشتری مورد نیاز می‌باشد. Odhiambo(2001,b) و همکاران با استفاده از روش عصبی-فازی، تبخیر - تعرق بالقوه مرجع چمن را تخمین زدند. داده‌های ورودی عبارت بوده از تابش خورشیدی، رطوبت نسبی، سرعت باد و درجه حرارت. میزان خطای محاسبه شده با این روش برابر با ۰/۴۸ میلی‌متر در روز بوده و میزان خطای به دست آمده از روش پنمن-مانتیس-فائو برابر با ۰/۵۶ میلی‌متر در روز بوده است. Kumar (2002) و همکاران با استفاده

تبخیر - تعرق یکی از اجزاء اصلی سیکل هیدرولوژی است و تعیین صحیح آن برای خیلی از مطالعات از قبیل توازن هیدرولوژیکی آب، طراحی و مدیریت سیستم‌های آبیاری، شبیه‌سازی میزان محصول و طراحی و مدیریت منابع آب از درجه اول اهمیت برخوردار است. تلفات آب بصورت بخار از سطح خاک را تبخیر و از سطح گیاهان را تعرق گویند. از نظر فیزیکی این دو فرایند مشابه هستند زیرا در هر دو صورت تغییر حالت آب از مایع به بخار و انتقال آن به جو رخ می‌دهد. مجموع این دو تلفات را تبخیر - تعرق می‌گویند. حدود ۹۷٪ آبی که در منطقه ریشه گیاه در اختیار آن قرار می‌گیرد صرف تبخیر-تعرق می‌شود و بر این اساس نیاز آبی گیاهان را برابر با تبخیر - تعرق فرض می‌کنند (Doorenbos, 1977). برای اندازه‌گیری تبخیر - تعرق هر گیاه از دستگاهی بنام لایسمتر استفاده می‌شود. بعلاوه این که استفاده از این دستگاه وقت‌گیر و پرهزینه می‌باشد، محققین مختلف ابتدا روابطی را برای تخمین تبخیر - تعرق بالقوه ارائه نموده که تابعی از فاکتورهای اقلیمی می‌باشد. سپس از حاصلضرب مقادیر تبخیر - تعرق بالقوه در ضرائب گیاهی، مقدار تبخیر - تعرق بالقوه گیاه را محاسبه می‌کنند. بطور کلی روش‌های موجود برای تخمین تبخیر - تعرق بالقوه به سه دسته زیر تقسیم می‌شود:

دسته اول: معادلات تجربی که یک یا چند عامل اقلیمی در آنها وجود دارد مانند روش تورنت وایت، بلینی کریدل، تورک، جنسن هیز و هارگریوز-سامانی و غیره.

دسته دوم: در این دسته فرآیند تبخیر - تعرق به عنوان فرآیند انتقال جرم (بخار آب) در نظر گرفته می‌شود و به روش‌های انتقال جرم معروفند مانند روش دالتون و روش آیرودینامیکی.

دسته سوم: در این دسته ترکیبی از روش آیرودینامیکی و توازن انرژی به کار می‌رود مانند روش نسبت باون، پنمن، پنمن-مانتیس و روش پنمن-مانتیس-فائو.

در پنج دهه گذشته مطالعاتی بر روی توسعه روش‌های تخمین تبخیر - تعرق و بهبود روش‌های موجود انجام شده است. تلاش در این جهت هنوز هم ادامه دارد. بعضی از این روش‌ها مانند روش بلینی - کریدل ساده و بعضی مانند روش ترکیبی پنمن (بر اساس فرآیندهای فیزیکی) پیچیده هستند. در روش‌های ترکیبی، دینامیک تبخیر با شدت تشعشعات خالص و مشخصه‌های انتقال آیرودینامیکی سطح ترکیب می‌شود. بعدها مانتیس مقاومت روزانه‌ای گیاه را وارد معادله

## ۲- مواد و روشها

### ۲-۱- مشخصات ایستگاه هواشناسی و لایسیمتری مورد استفاده

اطلاعات مورد نیاز این طرح از ایستگاه هواشناسی اکباتان واقع در ۱۰ کیلومتری شهر همدان فراهم شد. این ایستگاه دارای طول جغرافیائی ۴۸ درجه و ۳۲ دقیقه شرقی و عرض جغرافیائی ۳۴ درجه و ۵۲ دقیقه شمالی و ارتفاع ۱۷۳۰ متر از سطح دریا می‌باشد (شکل ۱). این منطقه بر اساس روش کوپن دارای آب و هوای نیمه خشک و سرد است. حداکثر دمای روزانه هوا در گرمترین ماه سال ۴۰ و حداقل آن در سردترین ماه سال ۳۴- درجه سانتی‌گراد است. میانگین بارش سالیانه آن در دوره آماری ۱۳۶۳ الی ۱۳۸۳ برابر با ۳۱۲/۳ میلی‌متر گزارش شده است. اطلاعات اقلیمی مورد نیاز این طرح که از ایستگاه مذکور بصورت روزانه تهیه شده شامل دمای حداکثر و حداقل هوا، رطوبت حداقل و حداکثر هوا، سرعت باد و ساعات آفتابی می‌باشد. در این ایستگاه برای اندازه‌گیری تبخیر - تعرق بالقوه (با گیاه مرجع چمن) از یک لایسیمتر زهکش‌دار به ابعاد ۱/۲×۲/۲۵×۱ متر استفاده شده است. خاک محل احداث لایسیمتر، عمیق، دارای بافت متوسط تا سنگین، با شوری ۰/۳۵ تا ۰/۶۱ دسی‌زیمنس بر متر، دارای چگالی ظاهری بین ۱/۷۴ تا ۱/۹۱ گرم بر سانتی‌متر مکعب و دارای خاصیت قلیائی می‌باشد. کف لایسیمتر جهت خروج زهاب شیب‌دار بوده و به ضخامت ۲۰ سانتی‌متر از شن ریز و درشت پر شده و روی آن لایه‌های خاک به تفکیک افقی‌ها اضافه شده است. میزان تبخیر - تعرق بالقوه با اندازه‌گیری میزان آب ورودی، میزان زهاب و رطوبت خاک در هر روز و با استفاده از توازن آب در لایسیمتر اندازه‌گیری شد.

### ۲-۲- روش رگرسیون فازی

#### ۲-۲-۱- عدد فازی

تئوری مجموعه‌های فازی اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسگرزاده پایه‌گذاری شد. پس از چند سال و در اوایل دهه هفتاد، با مطرح شدن منطق فازی، اولین کاربردهای آن در علوم مهندسی ارائه گردید.

منطق فازی که در برابر منطق کلاسیک مطرح گردید، ابزار توانمندی جهت حل مسائل مربوط به سیستم‌های پیچیده‌ای که درک آن‌ها مشکل و یا مسائلی که وابسته به استدلال، تصمیم‌گیری و استنباط بشری هستند، بشمار می‌آید.

از شبکه‌های عصبی مصنوعی تبخیر - تعرق بالقوه مرجع چمن را تخمین زدند. در این مطالعه داده‌های اقلیمی شامل حداقل و حداکثر درجه حرارت هوا، حداقل و حداکثر رطوبت نسبی هوا، سرعت باد و تابش خورشیدی از دیویس کالیفرنیا جمع‌آوری شده و به عنوان داده‌های ورودی محسوب شده است. قبل از استفاده از این اعداد آن‌ها را نرمال نموده‌اند. نهایتاً شبکه‌ای با یک لایه ورودی (با ۶ عنصر فرایند)، یک لایه مخفی (با ۷ عنصر فرایند) و یک لایه خروجی (با یک عنصر فرایند) بهترین نتایج را داده است. به طوری که مقدار خطا کمتر از ۰/۶ میلی‌متر در روز بود. در حالی که مقدار خطای روش پنمن-مانتیس برای داده‌های این تحقیق برابر با ۰/۹۷ میلی‌متر در روز بود. (Trajkovic (2003 و همکاران برای پیش‌بینی تبخیر - تعرق مرجع از روش شبکه‌های عصبی مصنوعی استفاده نمودند. بدین صورت که برای پیش‌بینی تبخیر - تعرق در روز آینده، از مقادیر تبخیر - تعرق ۱۱ و ۲۳ روز قبل استفاده نمودند. در واقع لایه ورودی آن‌ها دارای دو عنصر فرایند بود. نسبت تبخیر - تعرق پیش‌بینی شده به اندازه‌گیری شده، به طور متوسط ۰/۹۹۴ بود که کارائی خوب این روش را نشان می‌دهد.

محققین زیادی روش‌های مختلفی جهت حل مسائل رگرسیون فازی ارائه نموده‌اند. (Tanaka (1982 و همکاران برای اولین بار به این مسئله پرداختند. بدنبال آن بطور گسترده‌ای توسط محققین از جمله Chang (2001) و همکاران و Snachez (2003) و همکاران تحقیقات در این زمینه ادامه یافته است. (Lohani et al. (2006 با استفاده از منطق فازی رابطه بین دبی و اشل یکی از رودخانه‌های هند را مدل نمود. نتایج این تحقیق نشان داد که دقت این روش از روش سنتی (ترسیم منحنی دبی-اشل) و حتی روش شبکه‌های عصبی مصنوعی بیشتر است.

بطور کلی در شرایط زیر می‌توان از رگرسیون فازی استفاده کرد:

ناکافی بودن تعداد داده‌های مشاهده‌ای، مبهم بودن نحوه ارتباط بین متغیرهای مستقل و وابسته، وجود ابهام در ارتباط با یک پیشامد و نادرست بودن فرضیات خطی سازی.

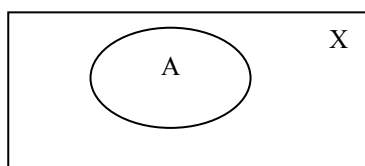
در این مقاله تبخیر - تعرق بالقوه با استفاده از روش رگرسیون فازی تخمین زده شده و نتایج آن با روش‌های پنمن-مانتیس و شبکه‌های عصبی مصنوعی مقایسه شد.



شکل ۱- نقشه استان همدان و موقعیت ایستگاه‌های آن

فرض کنید  $X$  مجموعه مرجع و  $A$  یک زیر مجموعه کلاسیک از  $X$  است. مجموعه کلاسیک  $A$  دارای مرز دقیق و صریح و معینی است. بنابراین هر عضوی مانند  $x$  از مجموعه مرجع  $X$  یا به مجموعه  $A$  تعلق دارد یا ندارد. در نتیجه عضویت آن بصورت یک گزاره درست (با ارزش یک) یا یک گزاره نادرست (با ارزش صفر) بیان می‌شود. درجه عضویت  $x$  به مجموعه کلاسیک  $A$  را با  $X_A(x)$  نمایش می‌دهند و بصورت شکل (۲) و معادله (۱) بیان می‌شود.

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$



سیستم‌هایی که دارای پیچیدگی کم و در نتیجه عدم قطعیت کم هستند را می‌توان با استفاده از معادلات ریاضی با دقت بالا مدل‌سازی نمود. سیستم‌هایی که پیچیدگی آن بیشتر است (به شرطی که به اندازه کافی داده در اختیار باشد) را می‌توان با استفاده از مدل‌هایی نظیر شبکه‌های عصبی مصنوعی مدل‌سازی نمود. در نهایت منطق فازی بهترین وسیله برای مدل‌سازی سیستم‌هایی است که دارای پیچیدگی زیاد بوده و داده‌های کافی از آن‌ها موجود نیست یا اطلاعات موجود مبهم است. اما باید توجه داشت که در این حالت دقت مدل نیز کاهش می‌یابد (Tanaka et al., 1982). بطور کلی سیستم‌های فازی را می‌توان به‌خوبی برای مدل‌سازی دو نوع اصلی عدم قطعیت در پدیده‌های موجود در جهان بکار برد. نوع اول، عدم قطعیت ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی یک پدیده است. نوع دوم عدم قطعیت مربوط به عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به یک پدیده یا ویژگی خاصی می‌باشد. یعنی یک پدیده ممکن است ذاتاً غیر صریح و وابسته به قضاوت افراد باشد. به‌عنوان مثال ویژگی گرم بودن هوا از نظر افراد مختلف متفاوت است و هیچ تعریف واحدی برای آن وجود ندارد.

## شکل ۲- مجموعه کلاسیک

برای تبدیل یک عدد فازی به یک عدد کلاسیک روش‌های مختلفی وجود دارد که یکی از آن‌ها روش مرکز سطح است که به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$(۴) A = \frac{\int \mu(x) \cdot x \cdot dx}{\int \mu(x) \cdot dx}$$

در رابطه (۴)  $A$  عدد کلاسیک می‌باشد

### ۲-۲-۲- رگرسیون فازی

در رگرسیون خطی کلاسیک به ازای هر سری از متغیرهای ورودی، یک مقدار مشخص برای متغیر خروجی محاسبه می‌گردد، در حالی که رگرسیون فازی بازه‌ای از مقادیر ممکن را برای متغیر خروجی تخمین می‌زند. توزیع این مقادیر بصورت تابع عضویت مشخص می‌شود.

بطور کلی برای برازش یک معادله رگرسیون خطی فازی سه دسته مدل وجود دارد: ۱- مدل‌های رگرسیون امکانی فازی<sup>۱</sup> ۲- مدل‌های رگرسیون کمترین مربعات<sup>۲</sup> ۳- مدل‌های رگرسیون مبتنی بر تحلیل بازه‌ای<sup>۳</sup>.

مدل‌های رگرسیون امکانی فازی اولین بار توسط Tanaka (1982) و همکاران ارائه گردید. این مدل‌ها بهترین معادله رگرسیون را با کمینه کردن میزان فازی بودن بدست می‌دهند. این کار با کمینه کردن مجموع کل پهنای توابع عضویت ضرائب فازی معادله رگرسیون انجام می‌شود. یکی از مدل‌های رگرسیون فازی امکانی مدلی است که در آن ضرائب فازی است و ورودی و خروجی مشاهده‌ای غیرفازی است. در این تحقیق از این مدل استفاده شده است. این مدل با معادله (۵) بیان می‌شود.

$$(۵) \tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \tilde{A}_3 x_3 + \dots + \tilde{A}_n x_n$$

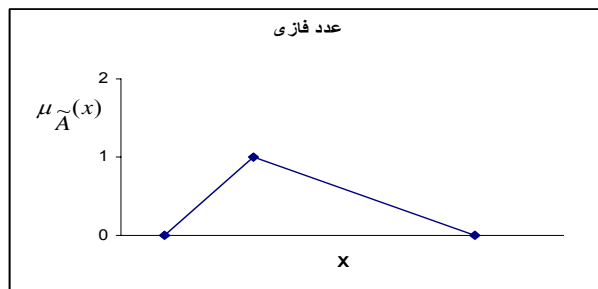
ضرائب معادله فوق یعنی  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$  اعداد فازی و متغیرهای ورودی مشاهده‌ای یعنی  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  و اعداد معمولی هستند. برای هر  $n$  متغیر یک عدد فازی مانند  $\tilde{y}$  بعنوان خروجی محاسبه‌ای بدست می‌آید.

فرض کنید مقدار  $m$  سطر داده مشاهده‌ای وجود دارد و در هر سطر  $n$  متغیر ورودی  $(x_{ij})$  و یک متغیر خروجی می‌باشد. همچنین فرض کنید عدد فازی بصورت مثلثی متقارن به شکل (۴) باشد (در این شکل  $c_i =$  پهنای عدد و  $P_i =$  مرکز عدد فازی). در آن صورت می‌توان تابع عضویت را بصورت معادله (۶) نوشت.

بر خلاف مجموعه‌های کلاسیک، مرز مجموعه‌های فازی به صورت صریح و دقیق نبوده بلکه به صورت یک باند است. در این حالت در مجموعه فازی  $\tilde{A}$  عضویت هر عنصری مانند  $x$  به صفر و یک ختم نمی‌شود بلکه می‌تواند مقادیر بین آن‌ها نیز باشد. درجه عضویت  $x$  به مجموعه فازی  $\tilde{A}$  در بازه  $[0, 1]$  قرار می‌گیرد.

تابعی که درجه عضویت  $x$  را به مجموعه فازی  $\tilde{A}$  نشان می‌دهد تابع عضویت می‌نامند. بیشترین مقدار تابع عضویت یک مجموعه فازی را ارتفاع آن مجموعه می‌گویند. به مجموعه فازی که تابع عضویت آن به صورت یکنواخت افزایشی یا کاهششی بوده و یا مقادیر درجه عضویت آن به صورت یکنواخت افزایشی و سپس کاهششی باشد مجموعه فازی محدب می‌گویند. به مجموعه فازی نرمال و محدب، عددی فازی گفته می‌شود. بنابراین می‌توان انواع اعداد فازی مانند مثلثی و ذوزنقه‌ای را تعریف نمود (شکل ۳).

بطور کلی عددی فازی  $\tilde{A}$  عبارت از مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب  $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$  که  $x \in X$  است که به صورت معادله (۲) یا (۳) نمایش داده می‌شود.



شکل ۳- عددی فازی  $\tilde{A}$

$$(۲) \tilde{A} = \{(x, \mu(x)) / x \in A\}$$

$$(۳) \tilde{A} = \{\mu(x)/x_1 + \mu(x)/x_2 + \mu(x)/x_3 + \dots\}$$

در رابطه فوق علامت جمع یک علامت جمع جبری در مجموعه کلاسیک نیست و فقط یک نماد برای نمایش عدد فازی است.

داده،

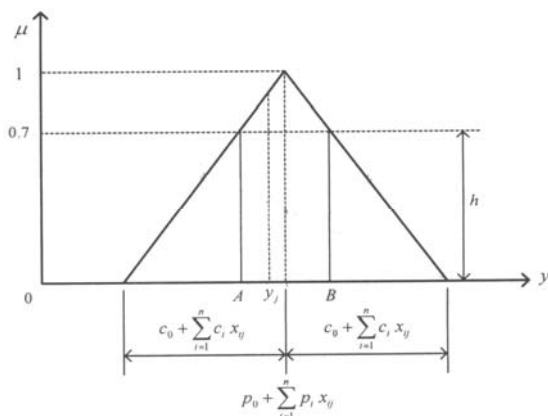
(j=1,2,3,4,...,m) باید نامساوی زیر صادق باشد:

$$\mu_{\tilde{y}_j}(y_i) \geq h \quad (10)$$

با افزایش مقدار h میزان فازی بودن خروجی‌ها نیز افزایش می‌یابد. رابطه (10) بیان می‌کند که خروجی فازی باید بین دو مقدار A و B که در شکل (5) مشخص شده‌اند قرار بگیرد. با توجه به رابطه (9) مرکز و پهنای تابع عضویت خروجی به ترتیب برابر با

$$p_0 + \sum_I p_i x_i \quad \text{و} \quad c_0 + \sum c_i x_i \quad \text{در نظر گرفته می‌شود.}$$

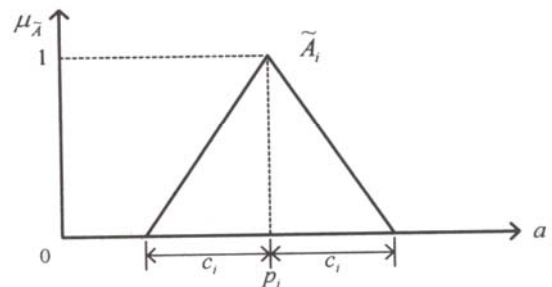
در روش رگرسیون فازی امکانی ضرائب به گونه‌ای تعیین می‌شود که پهنای خروجی فازی برای تمام مجموعه‌های داده‌ها حداقل گردد. بنابراین با توجه به مطالب مذکور تابع هدف وقیده‌های مسئله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به صورت جدول (1) ارائه نمود.



شکل ۵- تابع عضویت خروجی فازی

جدول ۱- مدل برنامه ریزی خطی برای حل رگرسیون خطی با مشاهدات غیر فازی

معادله رگرسیون	$\tilde{y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \dots + \tilde{A}_n x_n \quad (11)$
تابع هدف:	$\text{Minimize} : mc_0 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_i  x_{ij}  \quad (12)$
قیدها:	$p_0 + \sum p_i x_{ij} - (1-h)[c_0 + \sum c_i x_{ij}] \leq y_j \quad (13)$
	$p_0 + \sum p_i x_i + (1-h)[c_0 + \sum c_i x_{ij}] \geq y_j \quad (14)$



شکل ۴- تابع عضویت ضرایب فازی

$$\mu_{\tilde{A}}(a_i) = \begin{cases} 1 - \frac{|p_i - a_i|}{c_i} & p_i - c_i \leq a_i \leq p_i + c_i \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (6)$$

عدد فازی  $\tilde{A}$  در شکل (۴) برای نشان دادن مقدار " تقریباً برابر  $p_i$  " می‌باشد و  $c_i$  نشانگر میزان فازی بودن آن است که این مفهوم را می‌توان به شکل  $\tilde{A}_i = (p_i, c_i)$  نمایش داد بنابراین معادله رگرسیون فازی به صورت معادله (۷) می‌باشد.

$$\tilde{y} = (p_0, c_0) + (p_1, c_1)x_1 + (p_2, c_2)x_2 + \dots + (p_n, c_n)x_n \quad (7)$$

تابع عضویت متغیر فازی خروجی یعنی  $\tilde{y}$  به صورت معادله (۸) ارائه می‌شود.

$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} \max(\min[\mu_{\tilde{A}_i}(a_i)]) & \{a|y = f(x, a) \neq \emptyset\} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

با جایگذاری معادله (۶) در معادله (۸) بدست می‌آید:

$$\mu_{\tilde{y}}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{y - p_0 - \sum_I p_i x_i}{c_0 + \sum_I c_i |x_i|} & x_i \neq 0 \\ 1 & x_i = 0, y = 0 \\ 0 & x_i = 0, y \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

برای حل مسئله رگرسیون خطی فازی، الگوریتم‌های مختلفی پیشنهاد گردیده است که یکی از آن‌ها تبدیل مسئله رگرسیون خطی فازی به یک مسئله برنامه ریزی خطی است. هدف مدل رگرسیون فازی، تعیین مقادیر بهینه  $\tilde{A}$  می‌باشد به گونه‌ای که درجه عضویت متغیر خروجی فازی برای تمام داده‌ها از یک مقدار معینی مانند h که توسط کاربر تعیین می‌شود بزرگتر باشد. به بیان دیگر برای m سطر

قیده‌های مسئله با جایگزاری معادله (۹) در معادله (۱۰) بدست آمده است. بنابراین برای حل یک مسئله رگرسیون خطی باضرائب فازی و داده‌های غیر فازی، کافی است که یک مدل برنامه ریزی خطی بر اساس روابط جدول (۱) حل گردد. روابط (۱۳) و (۱۴) برای هر کدام از زوج داده‌های مشاهده‌ای بطور جداگانه‌ای نوشته می‌شود. بدین ترتیب بر اساس روابط مذکور تعداد 2m نامعادله تشکیل می‌شود. این کار توسط نرم‌افزار hydrogenerator<sup>۴</sup> انجام می‌گردد. بدین صورت که داده‌های مورد نیاز وارد این برنامه شده و گزینه‌ای بنام fuzzy model for Lingo را انتخاب کرده تا دستگاه نامعادلات بدست آید. دستگاه نامعادلات بدست آمده توسط این نرم‌افزار به عنوان ورودی برنامه Lingo محسوب می‌شود و نهایتاً خروجی این برنامه، ضرائب p می‌باشد.

در این تحقیق نتایج بدست آمده، با روش پنمن-مانتیس و شبکه عصبی مصنوعی مقایسه گردید. برای محاسبه تبخیر - تعلق به روش پنمن-مانتیس با استفاده از داده‌های اقلیمی از نرم‌افزار Cropwat و برای محاسبه تبخیر - تعلق به روش شبکه‌های عصبی مصنوعی از نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

برای ارزیابی و تایید نتایج بدست آمده از دو آماره جذر میانگین مربعات خطا یا RMSE<sup>۵</sup> و ضریب تعیین ( $R^2$ ) استفاده شده است. این آماره‌ها با روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$RMSE = \sqrt{\sum_{k=1}^N (X_k - Y_k)^2 / N} \quad (15)$$

$$R^2 = \left[ \frac{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N (X_k - \bar{X})^2 \sum_{k=1}^N (Y_k - \bar{Y})^2}} \right]^2 \quad (16)$$

که در آن  $N$  = تعداد مجموعه داده‌ها،  $X$  = مقدار خروجی محاسبه شده و  $Y$  = مقدار خروجی اندازه‌گیری شده می‌باشد.

### ۳- نتایج و بحث

برای تهیه مدل رگرسیون فازی از نصف داده‌های هواشناسی و لایسیمتری و برای تایید آن از نصف دیگر آن‌ها استفاده گردید. این انتخاب بطور تصادفی انجام شد. خروجی مدل، تبخیر - تعلق بالقوه ( $ET_0$ ) و کل ورودی‌های مورد استفاده بشرح زیر است (همگی به صورت روزانه):

۱- دمای حداقل هوا (Tmin) برحسب درجه سانتی‌گراد ۲- دمای حداکثر هوا (Tmax) ۳- دمای متوسط هوا (Tmean) ۴- رطوبت

نسبی حداقل هوا (RHmin) برحسب درصد ۵- رطوبت نسبی حداکثر هوا (RHmax) ۶- رطوبت نسبی متوسط هوا (RHmean) ۷- سرعت باد (u) برحسب متر در ثانیه ۸- ساعات آفتابی (n) برحسب ساعت.

بر اساس نوع ورودی‌ها سه مدل رگرسیون فازی امکانی به صورت زیر بدست آمد:

۱- مدل اول (fuzzy-1) با استفاده از دمای حداقل و حداکثر، رطوبت نسبی حداقل و حداکثر، سرعت باد و ساعات آفتابی. این مدل بشرح زیر می‌باشد:

$$ET_0 = (0.55, 0) + (0.1533, 0.1534)T_{min} + (0.078, 0)T_{max} + (0, 0.1053)RH_{min} + (0, 0)RH_{max} + (0.1375, 0)u + (0.1338, 0.0747)n \quad (17)$$

۲- مدل دوم (fuzzy-2) با استفاده از دمای متوسط، رطوبت نسبی حداقل و حداکثر، سرعت باد و ساعات آفتابی. این مدل بشرح زیر می‌باشد:

$$ET_0 = (0.0374, 0) + (0.1977, 0.1036)T_{mean} + (0.00479, 0.119)RH_{min} + (0, 0)RH_{max} + (0.3638, 0.0927)u + (0.1543, 0)n \quad (18)$$

۳- مدل سوم (fuzzy-3) با استفاده از دمای حداقل و حداکثر، رطوبت نسبی متوسط، سرعت باد و ساعات آفتابی. این مدل بشرح زیر می‌باشد:

$$ET_0 = (0.6735, 0) + (0.1788, 0.1181)T_{min} + (0.0632, 0)T_{max} + (0, 0.0844)RH_{mean} + (0.0478, 0)u + (0.145, 0)n \quad (19)$$

با قرار دادن داده‌های هواشناسی در مدل‌های فوق تبخیر - تعلق بصورت یک عدد فازی بدست آمده و با روش مرکز سطح، به یک عدد کلاسیک تبدیل می‌شود. این عدد، تبخیر - تعلق محاسبه‌ای می‌باشد. با مقایسه تبخیر - تعلق محاسبه‌ای و مشاهده‌ای می‌توان مقدار RMSE را محاسبه نمود. مقادیر RMSE برای سه مدل فوق و سه مدل شبکه‌های عصبی مصنوعی (ANN) با ورودی‌هایی مشابه با سه مدل فازی و مدل پنمن - مانتیس (P-M) در جدول (۲) ارائه شده است. در این جدول ضرائب تعیین ( $R^2$ ) بین مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه شده نیز ارائه شده است. در هر سه مدل شبکه عصبی مصنوعی، تعداد نرون‌ها در لایه ورودی برابر با تعداد متغیرهای ورودی، تعداد نرون در لایه خروجی برابر با یک (تبخیر - تعلق بالقوه) و تعداد یک لایه مخفی با یک نرون (با سعی و خطا بدست آمده است) در نظر گرفته شد. همچنین تابع فعالیت برای هر سه مدل از نوع خطی می‌باشد.

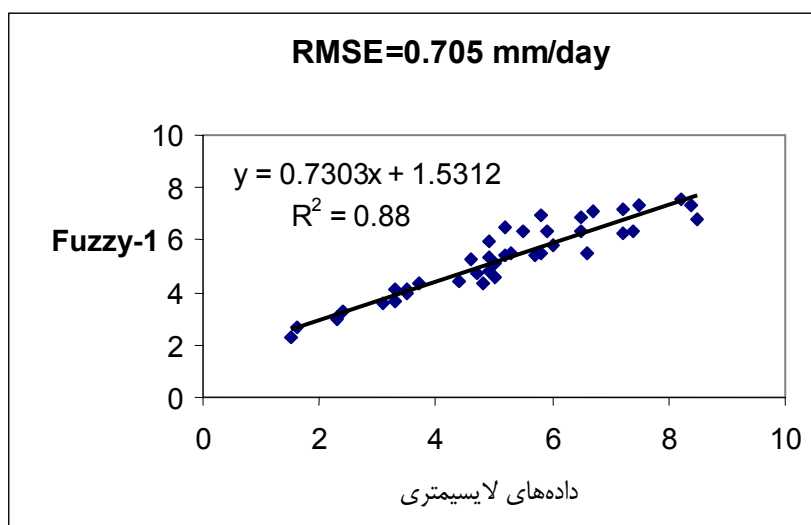
آن‌ها صرف نظر گردید. جدول (۲) نشان می‌دهد که خطای روش‌های فازی و عصبی تقریباً یکسان است. همچنین با انجام آزمون t با استفاده از نرم‌افزار MINITAB مشخص گردید که اختلاف بین نتایج مدل‌های فازی و عصبی با احتمال ۹۹ درصد معنی‌دار نیست. بنابراین می‌توان از هر یک از آن‌ها استفاده نمود. اما در شرایط عدم قطعیت داده‌ها، روش فازی مناسب است. همچنین با استفاده از آزمون مذکور مشخص شد که اختلاف بین روش پنمن-مانتیس با روش‌های فازی و عصبی معنی‌دار است.

در شکل‌های (۶) الی (۱۰) مقادیر تبخیر - تعرق محاسبه شده به روش‌های مختلف، با مقادیر مشاهده‌ای آن مقایسه شده است. واحدهای محورهای افقی و عمودی در همه این شکل‌ها میلی‌متر در روز می‌باشد. شکل (۹) مربوط به ANN-1 می‌باشد.

علاوه بر سه مدل فوق، مدل‌های دیگری با تعداد ورودی کمتر، حتی مانند مدل Odhiambo (2001,a) و همکاران با سه ورودی مورد بررسی قرار گرفت. خطای این مدل‌ها در مقایسه با مدل‌های ارائه شده در جدول (۲) بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد. بنابراین از ارائه

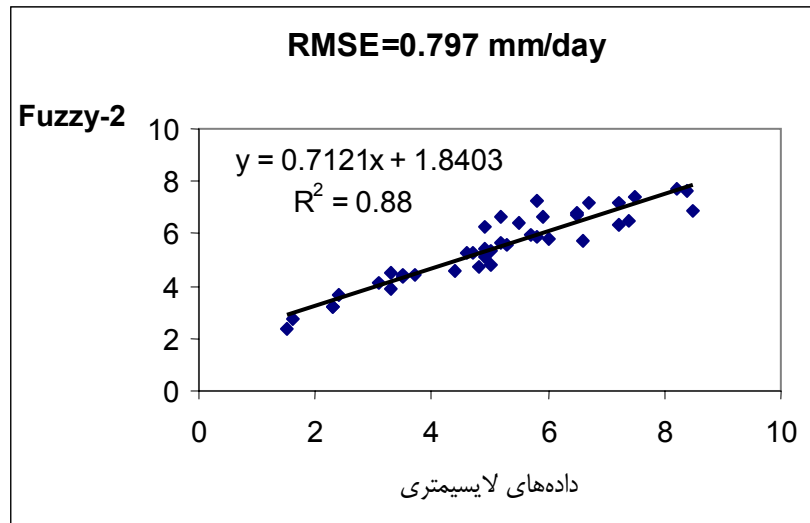
جدول ۲- مقایسه روش‌های رگرسیون فازی، شبکه‌های عصبی مصنوعی و پنمن-مانتیس

مدل	fuzzy-1	fuzzy-2	fuzzy-3	ANN-1	ANN-2	ANN-3	P-M
مشخصه							
RMSE (mm/day)	۰/۷۰۵	۰/۷۹۷	۰/۶۸۹	۰/۷۴۳	۰/۸۰۹	۰/۷۱۷	۱/۲۰۶
$R^2$	۰/۸۸۰	۰/۸۷۸	۰/۸۸۰	۰/۸۳۹	۰/۸۴	۰/۸۴۲	۰/۸۴۴

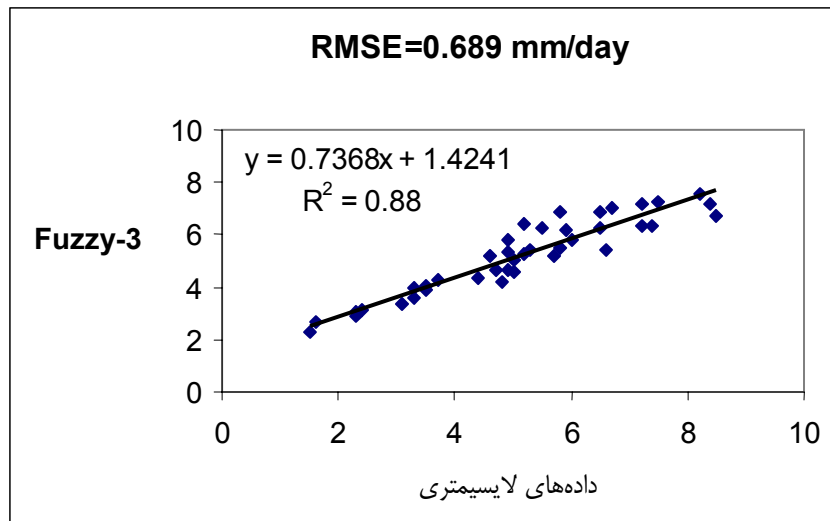


شکل ۶- مقایسه مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه‌ای با مدل fuzzy-1 (برحسب میلی‌متر در روز)

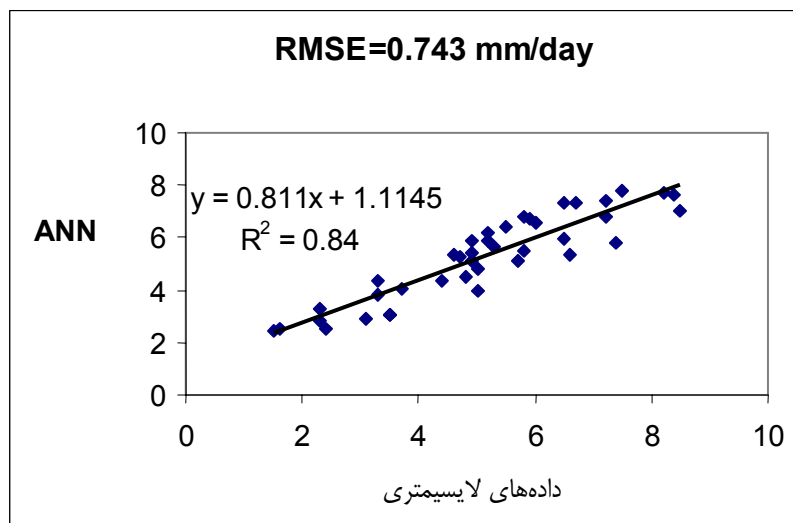




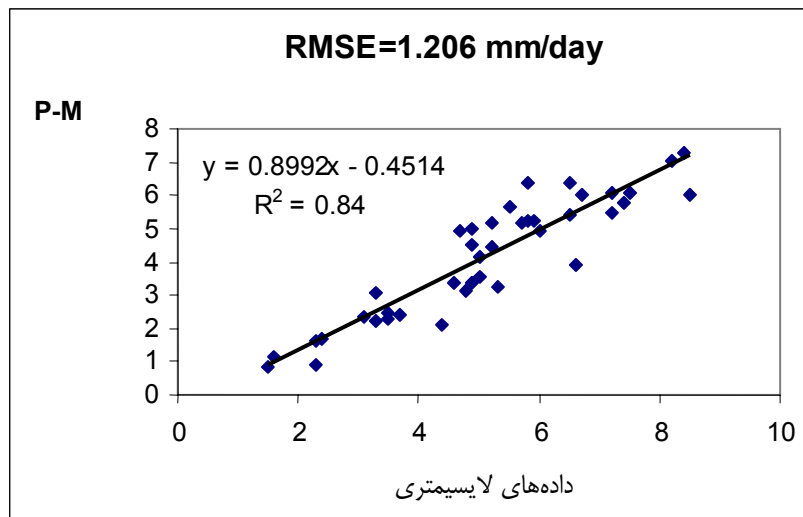
شکل ۷- مقایسه مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه‌ای با مدل fuzzy-2 (برحسب میلی‌متر در روز)



شکل ۸- مقایسه مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه‌ای با مدل fuzzy-3 (برحسب میلی‌متر در روز)



شکل ۹- مقایسه مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه‌ای با مدل ANN



شکل ۱۰- مقایسه مقادیر مشاهده‌ای و محاسبه‌ای با مدل P-M (برحسب میلی‌متر در روز)

#### ۴- نتیجه‌گیری

با توجه به جدول (۳) مشخص می‌شود که روش پنمن-مانتیس در اولویت آخر قرار می‌گیرد. این در حالی است که این روش در بین روش‌های مرسوم، جزء بهترین روش‌ها می‌باشد. همچنین با توجه به جدول مذکور مشخص می‌شود که ترتیب اولویت سه روش فازی بصورت fuzzy-3، fuzzy-1، و fuzzy-2 می‌باشد. ترتیب اولویت سه روش شبکه‌های عصبی مصنوعی نیز دقیقاً مانند سه روش فازی می‌باشد. این نشان می‌دهد که حساسیت روش‌های رگرسیون فازی و شبکه‌های عصبی مصنوعی نسبت به پارامترهای ورودی یکسان است.

برای انتخاب بهترین روش جهت تخمین تبخیر - تعرق از دو آماره ضریب تعیین و جذر میانگین مربعات خطا استفاده می‌شود. با مراجعه به قسمت نتایج، مشخص می‌شود که ضریب تعیین در روش‌های مختلف بین ۰/۸۴ تا ۰/۸۸ تغییر می‌کند اما RMSE در روش‌های مختلف دارای تغییرات بیشتری است. به طوری که کمترین آن مربوط به مدل fuzzy-3 می‌باشد. این در حالی است که این مدل دارای بیشترین ضریب تعیین نیز می‌باشد. بنابراین بهترین روش تخمین تبخیر - تعرق در این مطالعه، روش رگرسیون فازی با ورودی‌های دمای حداقل، دمای حداکثر، رطوبت نسبی متوسط، سرعت باد و ساعات آفتابی می‌باشد. در جدول (۳) اولویت روش‌های مختلف، جهت تخمین تبخیر - تعرق بالقوه در منطقه مورد مطالعه بر اساس RMSE ارائه شده است.

جدول ۳- اولویت روش‌های مختلف، جهت تخمین تبخیر و تعرق پتانسیل

P-M	ANN-2	ANN-1	fuzzy-2	ANN-3	fuzzy-1	fuzzy-3	روش
۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	اولویت

#### ۵- مراجع

- Allen, R. G. (1986). "A Penman for all season". *J. Irrig. Drain.*, ASCE. 112(4), pp. 348-368.
- Bruton, J. M., McClendon R. W. and Hoogenboom, G. (2000), "Estimating daily pan evaporation with artificial neural network". *Trans. Of the ASAE*. 43(2): pp. 492-496.

#### پی‌نوشت‌ها

- 1- fuzzy possibilistic regression
- 2- fuzzy least squares regression
- 3- interval regression

۴- این نرم افزار حاصل طرح تحقیقاتی است که توسط تیم تحقیقاتی دانشکده کشاورزی دانشگاه شهرکرد در سال ۱۳۸۵ به منظور بازسازی داده‌های گم شده هیدرولوژیکی ساخته شده است. کارفرمای این طرح سازمان مدیریت منابع آب کشور است.

5-Root Mean Square Error

- Odhiambo, L. O., Yoder, R. E. and Yoder D. C. (2001a), "Estimating of reference crop evapotranspiration using fuzzy state models", *Trans. Of the ASAE*. 44(3): pp. 543-550.
- Odhiambo, L. O., Yoder, R. E., Yoder, D. C. and Hines, J. W. (2001b), "Optimization of fuzzy evaporation model through neural training with input-output examples", *Trans. Of the ASAE*. 44(6), pp. 1625-1633.
- Sanchez, J. A. and Gomez, A. T. (2003), "Applications of fuzzy regression in actuarial analysis", *J. Risk Insur.* 70(4), pp. 797-802.
- Tanaka, H., Uejima, S. and Asai, K. (1982), "Linear regression analysis with fuzzy model", *IEEE Trans. Sys. Man., Cybern.*, 12(6), pp.903-907.
- Trajkovic, S., Todorovic B. and Standkovic, M. (2003), "Forecasting of reference evapotranspiration by artificial neural network", *J. Irrig. Drain., ASCE*. 129(6), pp. 454-457.
- Chang, Y.H.O. and Ayyub, B. M. (2001), "Fuzzy regression methods-A comparative assessment", *Fuzzy Sets and Systems*, 119(2), pp. 187-203.
- Doorenbos, J. and Pruitt, W. O. (1977), Guidelines for Predicting Crop Water Requirements. *Irrigation Drainage Paper*, No. 24. FAO. Rome. Italy.
- Jensen, M.E., Burman R. D. and Allen R. G. (1990), Evapotranspiration And Irrigation Water Requirements. *ASCE Manual and Report on Engineering Practice No.70*, New York.
- Kumar, M., Raghuwanshi N. S., Singh R., Wallender W. W. and Pruitt, W. O. (2002), "Estimating evapotranspiration using artificial neural networks", *J. Irrig. Drain. ASCE*. 128(4), pp. 224-233.
- Lohani, A.K., Goel, N. K. and Bhatia K. K. S. (2006), "Takagi-Sugeno fuzzy inference system for modeling stage-discharge relationship", *J. Hydro.* 333, pp. 146-160.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۶ بهمن ۱۳۸۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۴ آذر ۱۳۸۶

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۸ آذر ۱۳۸۶