

A Comparative Study of Linear Regression and Kalman Filter Methods in Updating Stage-Discharge Relationships, A Case Study: Hamidiyeh Station, Karkheh Basin

A. Khoramian^{1*}, M. Movahedi² and A.M. Akhoond-Alt³

Abstract

Access to data with adequate accuracy is one of the most important elements of optimal water resources management. In this context, the use of more accurate methods and reducing the error of measuring devices has always been considered. In the meantime, discharge values in open channels such as rivers are among the most frequently used water data. Despite advances in discharge measurement due to operational constraints, the use of stage-discharge relationships remains the most widely used method for estimating discharge in rivers and drainage channels. These relationships are always subject to various errors and uncertainties and need to be modified and updated regularly. In this study, the Linear Regression and Kalman filter data assimilation technique are evaluated to update these relationships. For this purpose, two series of hypothetical and measured data were used to develop the methodology and prove the efficiency of this method in improving the performance of stage-discharge relationships. The results obtained showed a 22% and 97% reduction in RMSE and MAE assessment statistics respectively by applying the Linear Regression and Kalman filter to hypothetical data. After confirming the effectiveness of the filter, it was also applied to the real data from the Hamidiyeh station in Karkheh basin. The results showed a reduction in the RMSE and MAE by 31 and 42 percent, respectively, when using the Kalman filter. It can be deduced that the use of the Kalman filter to modify and update the coefficients of the relationship between stage and discharge is effective to increase the accuracy of data estimated from these relationships.

Keywords: Stage-Discharge Relationships, Data Assimilation, Kalman Filter, Karkheh Basin.

Received: May 23, 2024

Accepted: August 29, 2024

بررسی مقایسه‌ای روش‌های رگرسیون خطی و فیلتر کالمن در به‌روزرسانی روابط دبی-اشل (مطالعه موردی: ایستگاه هیدرومتری حمیدیه، حوضه آبریز کرخه)

امین خرمیان^{۱*}، محمد موحدی^۲ و علی محمد آخوندعلی^۳

چکیده

دسترسی به داده با دقت مناسب از ضروری‌ترین ارکان مدیریت بهینه منابع آب در حوضه‌های آبریز است. در این راستا، همواره استفاده از روش‌های دقیق‌تر و کاهش خطای تجهیزات اندازه‌گیری موردتوجه بوده است. در این میان، مقادیر دبی در مقاطع روباز نظیر رودخانه‌ها از پرکاربردترین داده‌های آب است. علیرغم پیشرفت‌های انجام‌گرفته در اندازه‌گیری دبی، با توجه به محدودیت‌های عملیاتی استفاده از روابط دبی-اشل کماکان پرکاربردترین روش در برآورد دبی در رودخانه‌ها و زهکش‌ها است. این روابط همواره با خطاها و عدم قطعیت‌های مختلف روبرو بوده و اصلاح و به‌روزرسانی دوره‌ای آن‌ها ضروری است. در این تحقیق، روش شناسی مبتنی بر بررسی روش‌های رگرسیون خطی و تکنیک داده‌گذاری فیلتر کالمن به منظور به‌روزرسانی این روابط مورد ارزیابی قرار گرفته است. بدین منظور، از دو سری داده فرضی و اندازه‌گیری شده باهدف توسعه روش‌شناسی و اثبات کارایی این روش در بهبود عملکرد روابط دبی-اشل استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده کاهش ۲۲ و ۹۴ درصدی آماره‌های ارزیابی RMSE و MAE به ترتیب با به‌کارگیری رگرسیون خطی و فیلتر کالمن برای داده‌های فرضی است. به همین ترتیب پس از تأیید کارایی فیلتر، از آن برای داده‌های واقعی ایستگاه هیدرومتری حمیدیه واقع بر روی رودخانه کرخه نیز استفاده شد. نتایج نشان‌دهنده کاهش ۳۱ و ۴۲ درصدی آماره‌های RMSE و MAE در صورت استفاده از فیلتر کالمن است. بر این اساس، می‌توان بیان کرد که استفاده از فیلتر کالمن به منظور اصلاح و به‌روزرسانی ضرایب رابطه دبی-اشل در افزایش دقت داده‌های برآورد شده از این روابط به‌خصوص در شرایط سیلابی بسیار مؤثر است.

کلمات کلیدی: روابط دبی-اشل، داده‌گذاری، فیلتر کالمن، حوضه آبریز کرخه.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۳/۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۶/۸

1- Assistant Professor, Department of Hydrology and Water Resources, Faculty of Water and Environmental Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: a.khoramian@scu.ac.ir

2- Ph.D. Student in Water Resources Engineering, Department of Hydrology and Water Resources, Faculty of Water and Environmental Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

3- Professor, Department of Hydrology and Water Resources, Faculty of Water and Environmental Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.

*- Corresponding Author

DOI: [10.22034/IWRR.2024.459089.2759](https://doi.org/10.22034/IWRR.2024.459089.2759)

۱- استادیار گروه هیدرولوژی و منابع آب، دانشکده مهندسی آب و محیط زیست، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.

۲- دانشجوی دکتری مهندسی منابع آب، گروه هیدرولوژی و منابع آب، دانشکده مهندسی آب و محیط زیست، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.

۳- استاد گروه هیدرولوژی و منابع آب، دانشکده مهندسی آب و محیط زیست، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران.

*- نویسنده مسئول

بحث و مناظره (Discussion) در مورد این مقاله تا پایان پائیز ۱۴۰۳ امکانپذیر است.

۱- مقدمه

کیفیت آمار و اطلاعات همواره از مهم‌ترین ارکان هیدرولوژی و مدیریت منابع آب به شمار می‌رود و تمامی تصمیمات در حوزه منابع آب بر اساس این آمار و اطلاعات به دست آمده از حوضه‌های آبریز گرفته می‌شود. بر این اساس، استفاده از روش‌های علمی در راستای افزایش صحت و دقت آمار از الزامات مدیریت هر حوضه آبریز به شمار می‌رود. در این میان، تعیین میزان دقیق دبی در رودخانه‌ها و زهکش‌ها بسیار با اهمیت است. با توجه به محدودیت‌هایی نظیر هزینه بالا تجهیزات و تعمیر و نگهداری دشوار استفاده از ابزارهای دبی‌سنجی جدید با محدودیت روبرو است. از این‌رو، کماکان استفاده از روابط دبی-اشل یکی از پرکاربردترین روش‌های دبی‌سنجی است. در این روش خطای دستگاه و خطای رابطه‌ی دبی-اشل باعث کاهش دقت برآوردهای انجام شده از دبی می‌شود. استفاده از روش‌های داده‌گویی به منظور کاهش خطای مدل با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری^۱ شده در هیدرولوژی بسیار مرسوم است (Cho et al., 2020; Franssen and Neuweiler, 2015; Ghorbanidehno et al., 2020). داده‌گویی^۲ به دنبال ترکیب خطاها بین مدل‌های پیش‌بینی و داده‌های اندازه‌گیری شده از طریق به‌روزرسانی حالت‌های مدل است.

پژوهش‌های مختلفی تاکنون با استفاده از انواع فیلترهای کالمن از جمله KF^3 ، EKF^4 و $EnKF^5$ در زمینه هیدرولوژی و داده‌گویی مدل‌های هیدرولوژیکی با هدف بهبود پیش‌بینی‌ها صورت گرفته است. (Mehrparvar et al., 2019) به منظور به‌روزرسانی و اصلاح منابع خطا در مدل SWAT از تکنیک داده‌گویی $EnKF$ استفاده کردند که نتایج حاکی از بهبود ۰/۸۶ آماره NSE نسبت به حالت عدم استفاده از داده‌گویی است. (Tajiki et al., 2019) با استفاده فیلترهای کالمن دسته‌ای ($EnKF$) به داده‌گویی نتایج مدل مفهومی Hymod در حوضه آبخیز رودک پرداختند که نتایج نشان‌دهنده افزایش معیارهای NSE ، $DCpeak$ و $LNSE$ مدل هیدرولوژی Hymod توسط الگوریتم $EnKF$ نسبت به الگوریتم بهینه‌سازی تکامل مجتمع‌های مخلوط^۶ شده بوده است. (Azadi et al., 2016) تأثیر داده‌گویی بر برون داد بارش در مدل WRF را بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده تأثیر مثبت استفاده از داده‌گویی بوده است. (Piazzini et al., 2021) برتری نتایج روش $EnKF$ را نسبت به روش فیلتر ذره‌ای^۷ را در داده‌گویی مدل مفهومی بارش-رواناب نشان دادند. همچنین، Samuel et al. (2019) نیز تأثیر قابل توجه استفاده از داده‌گویی به روش $EnKF$ را برای پیش‌بینی جریان‌ها و جریانات ورودی به حوضه‌های آبیسی^۸ هیکن

و میو^۹ در منطقه یوکان^{۱۰} کانادا را در ترکیب با مدل هیدرولوژیکی HYDROTEL اثبات کردند. (Clark et al., 2008) نیز با استفاده از روش $EnKF$ و استفاده از داده‌های مشاهداتی مدل هیدرولوژیکی را به‌روزرسانی کرد. (Llauca et al., 2023) به ارزیابی کاربرد و عملکرد داده‌گویی در یک سیستم پیش‌بینی روزانه در آندهای گرمسیری کشور پرو^{۱۱} با استفاده از الگوریتم‌های $EnKF$ و PF در طول دوره فوریه تا مارس ۲۰۲۲ پرداختند. بدین منظور از مدل بارش رواناب GR4H با ۱۰۰ عضو در چهار آزمایش داده‌گویی با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای IMERG-E و GSMaP-NRT استفاده شد و باهدف بررسی میزان خروجی رواناب حوضه در هر آزمایش اندازه‌گیری شد. در نهایت بهترین نتایج در پیش‌بینی سیلاب در استفاده هم‌زمان از ترکیب $GSMaP-NRT$ و $EnKF$ مشاهده شد. (Pensoneault et al., 2023) با استفاده روش الگوریتم EKI^{12} به استخراج توزیع پارامترهای روندیابی در رودخانه پرداختند. بدین صورت که با استفاده از این روش دقت پیش‌بینی جریان در بالادست ایستگاه اندازه‌گیری در یک حوضه مجازی بهبود داشته و عملکرد مدل پیش‌بینی در سراسر حوضه بهبود داشته است.

از انواع فیلتر کالمن به منظور داده‌گویی از زمان ابداع آن تاکنون در رشته‌ها و زمینه‌های گوناگون مورد استفاده قرار گرفته که در علم هیدرولوژی نیز به جهت وجود خطاها و عدم قطعیت‌های متعدد ناشی از مدل‌ها، ابزارهای اندازه‌گیری، پارامترهای ورودی و داده‌ها در راستای افزایش دقت پیش‌بینی‌ها در زمینه‌های رواناب‌ها، بارش‌ها و غیره بسیار مورد توجه و استفاده قرار گرفته است. مهم‌ترین شاخصه روش فیلتر کالمن این است که خطاهای ابزار اندازه‌گیری و معادله (سیستم) را در محاسبات وارد می‌کند. بررسی مطالعات انجام‌شده نشان می‌دهد، از داده‌گویی تاکنون باهدف بهبود نتایج انواع مدل‌های پیش‌بینی سیلاب و هواشناسی استفاده شده است و استفاده از آن در به‌روزرسانی روابط دبی-اشل خطی بر اساس اندازه‌گیری‌ها انجام نگرفته است. بر این اساس، در این پژوهش با توجه به به‌روزرسانی روابط دبی-اشل با استفاده از اندازه‌گیری‌های دبی دوره‌ای مورد ارزیابی قرار گرفت.

در این مقاله سعی شده با استفاده از فیلتر کالمن که تلفیقی از روش‌های استنباط بیزین^{۱۳} و زنجیره مارکوف است، با استفاده از مقادیر اندازه‌گیری در هر گام زمانی، روابط دبی-اشل را به‌روزرسانی کرد. همچنین، می‌توان بیان کرد که فیلتر کالمن یک تخمین‌گر است که از

تخمین حالت قبل و مشاهده فعلی برای محاسبه تخمین حالت فعلی استفاده می‌کند.

تلفریک در فاصله ۲۰۰ متری پایین دست ایستگاه در محل مناسبی قرار دارد.

۲- مواد و روش‌ها

۱-۱- منطقه مورد مطالعه

حوضه آبریز رودخانه کرخه به مساحت ۵۱۶۴۳ کیلومتر مربع سومین حوضه آبریز بزرگ ایران است که در تقسیم‌بندی حوضه‌های آبریز، زیرحوضه آبریز خلیج فارس و دریای عمان است. حوضه آبریز کرخه بزرگ شامل بیش از نیمی از استان‌های لرستان و کرمانشاه و بخش‌هایی از استان‌های کردستان، همدان، ایلام و خوزستان است. آبراهه اصلی این حوضه، رودخانه کرخه است که از تلاقی رودخانه‌های سیمره و زال در جنوب پل دختر ایجاد می‌شود. رودخانه سیمره نیز از به هم رسیدن رودخانه‌های گاماسیاب و قره‌سو شکل می‌گیرد. رودخانه گاماسیاب از دامنه‌های کوه گرین نهاوند و قره‌سو از شمال کرمانشاه سرچشمه می‌گیرند. این دو رودخانه در جنوب هرسین با یکدیگر می‌آمیزند و از آنجا به بعد با نام سیمره خوانده می‌شود. رودخانه کشکان نیز از ارتفاعات شرق و شمال خرم‌آباد سرچشمه می‌گیرد و به رودخانه سیمره می‌پیوندد که پس از تلاقی سیمره و زال کرخه نامیده می‌شود.

سد مخزنی کرخه با حجم مخزنی بیش از ۷ میلیارد مترمکعب به‌عنوان بزرگ‌ترین سد ایران، مهم‌ترین سد در حوضه آبریز کرخه به شمار می‌رود (Goudarzi et al., 2021). این سد در ۲۲ کیلومتری شمال غرب شهر اندیمشک قرار دارد و تأمین آب ۳۴۰ هزار هکتار از اراضی و شبکه‌های آبیاری پایین دست را بر عهده دارد. در پایین دست سد مخزنی کرخه ۲ سد انحرافی کرخه و حمیدیه که موقعیت آن‌ها در نقشه مشخص شده قرار دارد. وظیفه این سدها تأمین آب اراضی و شبکه‌های آبیاری است. با توجه به سیلاب‌های متعدد رخ داده در حوضه کرخه مانند سیلاب سال ۹۸ و وارد شدن خسارات به مناطق پایین دست سد مخزنی کرخه، تعیین دبی سیلاب در رودخانه کرخه و بدست آوردن رابطه دقیق دبی-اشل بسیار حائز اهمیت است.

در این پژوهش ایستگاه هیدرومتری حمیدیه، واقع بر روی رودخانه کرخه انتخاب شد. این ایستگاه در طول جغرافیایی ۵۱° ۲۵' ۴۸" و عرض جغرافیایی ۳۱° ۲۹' ۸" و در ارتفاع ۱۹/۲۵ متر از سطح دریا قرار گرفته است (شکل ۱). از علل انتخاب این ایستگاه می‌توان به فاصله مناسب آن از سد مخزنی کرخه و سدهای تنظیمی کرخه و انحرافی حمیدیه و داشتن پل تلفریک به منظور اندازه‌گیری دبی اشاره کرد (شکل ۲). پل

۲-۲- داده‌های مورد استفاده

در این پژوهش از ۲ دسته داده فرضی و داده‌های اندازه‌گیری ایستگاه حمیدیه استفاده شده است. با توجه به وجود خطا در تجهیزات اندازه‌گیری، هیچ‌گاه دبی واقعی رودخانه مشخص نیست، از این رو از یک سری داده فرضی باهدف اعتبارسنجی و صحت‌سنجی فیلتر کالمن استفاده شد. در این پژوهش از ۳۰ داده دبی و اشل اندازه‌گیری شده در ایستگاه حمیدیه در بازه زمانی فروردین ۱۳۹۹ تا مهر ۱۴۰۰ استفاده شد. ۲۰ نمونه اول به منظور تعیین رابطه دبی-اشل و ۱۰ نمونه بعدی به عنوان مقادیر اندازه‌گیری برای به‌روزرسانی رابطه به‌دست‌آمده با استفاده از فیلتر کالمن استفاده شد. شایان ذکر است از ۱۰ نمونه مورد استفاده برای آزمون، ۱ داده به علت پرت بودن از روند محاسبات حذف شد و با ۹ داده عملکرد فیلتر کالمن مورد ارزیابی قرار گرفت. داده‌های اندازه‌گیری مورد استفاده در جدول زیر آورده شده است. به منظور اثبات معنی‌داری رابطه دبی-اشل خطی برای رودخانه کرخه در محل ایستگاه حمیدیه، ضریب تعیین R^2 و نیز مقدار P -value در آزمون t-student برای داده‌های دبی و اشل اندازه‌گیری شده (جدول ۱) محاسبه شد. بدین ترتیب مقدار ضریب تعیین برابر ۰/۹۷ و P -value برابر $۲/۷ \times ۱۰^{-۶}$ به دست آمد که حاکی از معنی‌داری رابطه خطی در سطح ۹۹ درصد است.

Table 1- Measured discharge and Stage values at Hamidiyeh station

جدول ۱- مقادیر دبی و اشل اندازه‌گیری شده در محل ایستگاه حمیدیه

River Stage (cm)	Measured Discharge(m ³ /s)
116	44.79
90	31.26
111	48.45
70	20.61
48	14.83
124	48.42
94	35.31
80	27.30
57	17.82

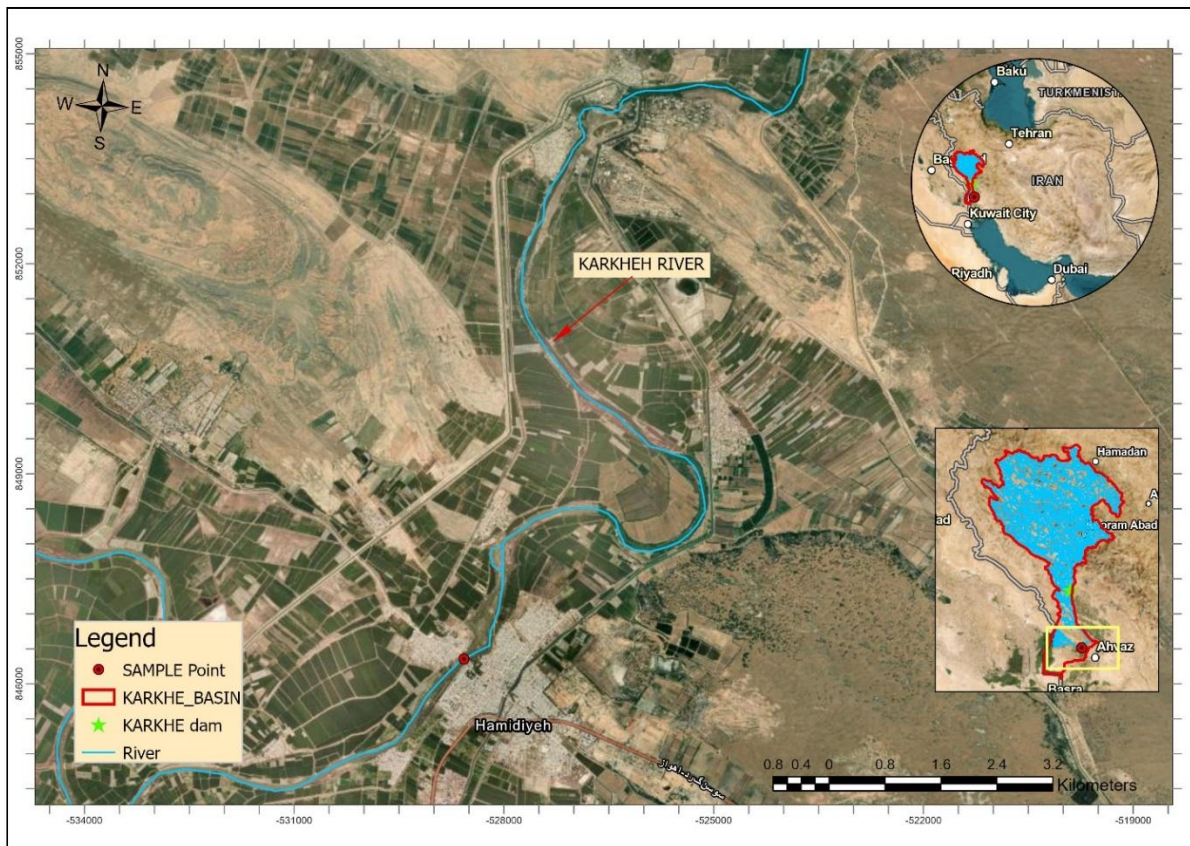


Fig. 1- Location of Karkheh watershed, dams and quantitative sampling site
 شکل ۱- موقعیت حوضه آبریز کرخه، سد ها و محل نمونه برداری کمی



Fig. 2- Measuring the discharge of the Karkheh River using the cableway and Velocity Current Meter
 شکل ۲- در حال اندازه گیری دبی رودخانه کرخه با استفاده از پل تلفریک و مولینه

Table 2- Technical specifications of Cup Current Meter

جدول ۲- مشخصات فنی مولینه فنجان	
Measuring range	0/05 - 5 m/s
Minimum Water Level	8 cm
Material	Brass
1- Digital counter with the ability to record 12000 pulses per minute	
2- The ability to measure the discharge from the cableway	
3- Having a two-piece balance sequence	
4- Certified by the Water Resources Research Center of the Ministry of Energy of Iran with an accuracy of 0.005	

۲-۳- روش‌های مورد استفاده

۲-۳-۱- رگرسیون خطی^{۱۶}

رگرسیون یکی از روش‌های مهم تحلیل آماری است که برای مدل‌سازی و بررسی روابط بین یک متغیر وابسته و یک یا چند متغیر مستقل استفاده می‌شود. این تکنیک به ویژه در تحلیل‌های کمی، پیش‌بینی‌ها و آزمون فرضیه‌ها کاربرد دارد. رگرسیون خطی ساده، یکی از انواع رایج رگرسیون است که رابطه‌ای خطی بین متغیرها برقرار می‌کند و به تحلیل‌گر این امکان را می‌دهد تا اثرات متغیرهای مستقل را بر متغیر وابسته بررسی و پیش‌بینی کند. رگرسیون در حوزه‌های گسترده‌ای مانند اقتصاد، زیست‌پزشکی، روان‌شناسی و علوم اجتماعی برای تحلیل داده‌ها و ساخت مدل‌های پیش‌بینی استفاده می‌شود (Kutner et al., 2005).

در اندازه‌گیری مقادیر دبی در محل ایستگاه هیدرومتری حمیدیه از مولینه فنجان آمریکایی استفاده شد (شکل ۳) مشخصات مولینه مورد استفاده در جدول ۲ ارائه شده است. همچنین میزان دبی میانگین براساس روش مقطع میانگین^{۱۵} محاسبه شد. رابطه ریاضی مورد استفاده در زیر آورده شده است (Alizahed, 2018).

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\bar{V}_i + \bar{V}_{i+1}}{2} \right) \times \frac{d_i + d_{i+1}}{2} \times (b_{i \rightarrow (i+1)}) \right] \quad (1)$$

در رابطه ۱، i : شماره محل‌های اندازه‌گیری توسط مولینه (شکل ۴)، \bar{V}_i : متوسط سرعت آب در خط عمودی (i) بر حسب متر بر ثانیه، \bar{V}_{i+1} : متوسط سرعت آب در خط عمودی ($i+1$) بر حسب متر بر ثانیه، d_i : عمق آب در خط عمودی (i) به متر، d_{i+1} : عمق آب در خط عمودی ($i+1$) به متر و $b_{i \rightarrow (i+1)}$: عرض سطح آب بین دو خط i و $i+1$ به متر هستند.



Fig. 3- Cup Current Meter
شکل ۳- مولینه فنجان

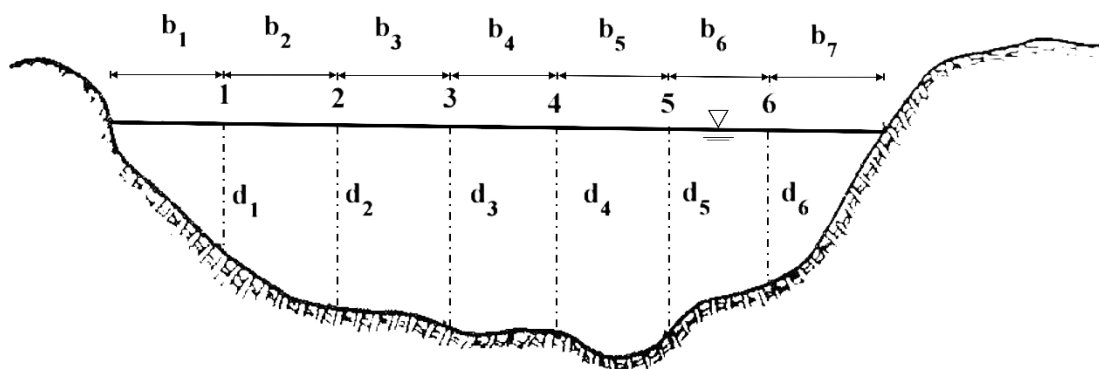


Fig. 4- Measurement by Mean Section Method (Alizahed, 2018)

شکل ۴- اندازه‌گیری به روش میانگین مقطع

رگرسیون خطی رایج‌ترین روش مورد استفاده به منظور به‌روزرسانی روابط دبی-اشل است. در این پژوهش میزان دقت روش رگرسیون خطی و روش فیلتر کالمن به منظور به‌روزرسانی روابط دبی-اشل مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته است. به‌روزرسانی رابطه دبی-اشل با استفاده از روش رگرسیون بدین گونه است که ابتدا رابطه اولیه با استفاده از داده‌های تاریخی دبی اندازه‌گیری شده استخراج می‌شود. سپس با اضافه شدن هر زوج داده اندازه‌گیری (دبی و اشل) به سری داده‌های تاریخی از سری جدید رگرسیون گرفته‌شده و معادله پیشین به‌روزرسانی می‌شود.

۲-۳-۲- فیلتر کالمن

فیلتر کالمن اولین بار توسط رودلف ایمیل کالمن^{۱۷} در سال ۱۹۶۰ ارائه شد (Kalman, 1960). الگوریتم فیلتر کالمن را می‌توان در روابط ۲ تا ۶ ارائه نمود (Reid & Term, 2001). در این روابط اندیس n : گام زمانی، s : تخمین و u به‌روزرسانی متغیرها را نشان می‌دهند. در روابط ارائه شده منظور از: مدل: رابطه دبی-اشل؛ ۲- ابزار اندازه‌گیری: مولینه دبی-سنجی؛ ۳- واریانس خطای مدل (p): واریانس سری مقادیر اختلاف داده‌های دبی واقعی با دبی‌های به‌دست‌آمده از رابطه دبی-اشل و ۴- واریانس خطای ابزار اندازه‌گیری (r): واریانس سری مقادیر اختلاف داده‌های دبی واقعی با دبی‌های اندازه‌گیری شده توسط ابزار اندازه‌گیری است.

معادلات (۲) و (۳) به ترتیب بیانگر به‌روزرسانی متغیر حالت و واریانس خطای مدل هستند. معادله (۴) بیانگر ضریب کالمن و معادلات (۵) و (۶) به ترتیب بیانگر تخمین متغیر حالت و تخمین واریانس خطای مدل برای گام بعدی هستند.

$$\hat{x}_{u,n} = \hat{x}_{s,n} + K_n(z_n - \hat{x}_{s,n}) \quad (۲)$$

در رابطه فوق $\hat{x}_{u,n}$ متغیر حالت به‌روزرسانی شده در گام زمانی n ، $\hat{x}_{s,n}$ متغیر حالت تخمین زده‌شده در گام زمانی $n-1$ برای گام زمانی n ، z_n مقدار اندازه‌گیری شده توسط ابزار اندازه‌گیری و K_n ضریب کالمن^{۱۸} است. در رابطه (۲) ابعاد متغیرهای $\hat{x}_{u,n}$ ، $\hat{x}_{s,n}$ و z_n یکسان بوده و با توجه به مسئله مورد نظر می‌توانند دارای هر ابعادی باشند. به‌طور مثال اگر هدف دبی باشد، ابعاد آن به‌صورت $\frac{L^3}{T}$ خواهد بود. البته باید بیان کرد که در بخش به‌روزرسانی ضرایب معادله دبی اشل (شیب a و عرض از مبدأ b) از رابطه (۲) استفاده‌شده و متغیرهای مذکور در آن بخش مقادیر مرتبط با شیب و عرض از مبدأ را اختیار می‌کنند. در صورت استفاده از رابطه (۲) برای دبی می‌توان به جای $\hat{x}_{u,n}$ از عبارت $Q_{u,n}$ را استفاده نمود.

$$p_{u,n} = (1 - K_n)p_{s,n} \quad (۳)$$

در این رابطه، $P_{s,n}$: تخمین واریانس خطای مدل در گام زمانی $n-1$ برای گام زمانی n و $P_{u,n}$: به‌روزرسانی واریانس خطای مدل در گام n برای استفاده در گام $n+1$ است. منظور از واریانس خطای مدل، واریانس مقادیر خطای تخمین‌های مدل (رابطه دبی-اشل) تا مقدار واقعی دبی است. این مقدار با افزایش گام‌ها و مقادیر اندازه‌گیری شده به‌صورت پیوسته به‌روزرسانی شده و مقدار آن کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه هیچ‌گاه نمی‌توان میزان دبی واقعی را در رودخانه‌ها به دست آورد، لذا واریانس خطای مدل براساس تجارب متخصصین رودخانه مورد نظر تعیین می‌شود.

$$K_n = \frac{P_{s,n}}{P_{s,n} + r_n} \quad (۴)$$

در رابطه فوق r_n واریانس خطای ابزار اندازه‌گیری (یا همان خطای مولینه) است. منظور از واریانس خطای ابزار اندازه‌گیری اختلاف بین مقادیر واقعی دبی و مقادیر اندازه‌گیری شده است که مقدار آن مانند واریانس خطای مدل براساس تجارب کارشناسی به دست می‌آید. شایان ذکر است که تمام اندازه‌گیری‌های دبی در این پژوهش توسط نویسندگان صورت گرفته و بدین ترتیب شناخت کاملی نسبت به حدود مقدار r_n وجود دارد. در این مقاله مقدار r_n یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده است. البته این مقدار تا زمانی صادق است که دستگاه دچار دست‌کاری یا تغییری در سیستم آن نشده باشد.

$$\hat{x}_{s,n} = M(\hat{x}_{u,n-1}) \quad (۵)$$

در رابطه فوق M تابع انتقالی متغیرهای حالت است.

$$p_{s,n+1} = p_{u,n} \quad (۶)$$

و در رابطه فوق $p_{s,n+1}$ تخمین واریانس خطای مدل در گام n برای گام $n+1$ است.

معادلات فوق، معادلات بنیادی فیلتر کالمن بوده و تمامی روش‌های داده‌گواری دیگر نظیر EKF و EnKF بر اساس این روابط توسعه پیدا کرده است (Julier & Uhlmann, 2004; Evensen, 1994; Houtekamer & Mitchell, 1998). اساس داده‌گواری به روش KF در به‌روزرسانی روابط دبی اشل، استفاده از مقادیر اندازه‌گیری شده دبی در هر گام زمانی و به‌روزرسانی معادله دبی-اشل با در نظر گرفتن واریانس خطاهای مدل و ابزار اندازه‌گیری است. متغیر Z برابر مقدار اندازه‌گیری شده و دارای ابعاد $\frac{L^3}{T}$ است. لذا از روابط فوق تنها می‌توان مقادیر دبی را به‌صورت مستقیم به‌روزرسانی نمود. از این‌رو، به منظور به‌روزرسانی مقادیر شیب (a) و عرض از مبدأ (b) معادله دبی-اشل باید معادلات جدیدی به دست آورده شود. بر این اساس، معادلات زیر باهدف به‌روزرسانی مقادیر a و b استخراج شد.

به منظور به‌روزرسانی مقادیر a و b باید از رابطه (۲) استفاده نمود اما مشکل متغیر z و ابعاد آن است. لذا با جایگزینی مقدار دبی به‌روزرسانی شده $(\hat{x}_{u,n})$ به جای z ، معادله ۲ منظور به‌روزرسانی شیب $(a_{u,n})$ و عرض از مبدأ معادله $(b_{u,n})$ دبی-اشل استخراج می‌شوند. دبی به‌روزرسانی شده $(Q_{u,n})$ قطعاً از مقادیر $a_{u,n}$ و $b_{u,n}$ به‌دست می‌آید و بدین ترتیب روابط (۷) و (۸) به دست می‌آید.

$$\hat{x}_{u,n} = z_n = (a_{u,n} \times h) + b_{u,n} \rightarrow a_{u,n} = \frac{z_n - b_{u,n}}{h} \quad (7)$$

$$\hat{x}_{u,n} = z_n = (a_{u,n} \times h) + b_{u,n} \rightarrow b_{u,n} = z_n - (a_{u,n} \times h) \quad (8)$$

در رابطه فوق منظور از h تراز آب و واحد آن سانتی‌متر است. با استفاده از تغییر متغیرهای روابط (۷) و (۸) می‌توان رابطه (۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$a_{u,n} = a_{s,n} + K_n(a_{u,n} - a_{s,n}) \rightarrow a_{u,n} = a_{s,n} + K_n \left(\frac{z_n - b_{u,n}}{h} - a_{s,n} \right) \quad (9)$$

$$b_{u,n} = b_{s,n} + K_n(b_{u,n} - b_{s,n}) \rightarrow b_{u,n} = b_{s,n} + K_n(z_n - (a_{u,n} \times h) - b_{s,n}) \quad (10)$$

که $a_{s,n}$ و $b_{s,n}$ به ترتیب شیب و عرض از مبدأ معادله قبلی بوده که در نهایت به مقادیر $a_{u,n}$ و $b_{u,n}$ به‌روزرسانی می‌شوند. روابط ۹ و ۱۰ از طریق ۲ معادله ۲ مجهول حل می‌شوند صورت نهایی آن‌ها در روابط ۱۱ و ۱۲ آورده شده است.

$$(h \times a_{u,n}) + (K_n \times b_{u,n}) = (a_{s,n} \times h(1 - K_n)) + (K_n \times z_n) \quad (11)$$

$$(K_n \times a_{u,n} \times h) + b_{u,n} = b_{s,n}(1 - K_n) + (K_n \times z_n) \quad (12)$$

★ گام‌های پیاده‌سازی فیلتر کالمن

گام‌های پیاده‌سازی برای هر دو سری داده فرضی و واقعی یکسان است. در این قسمت گام‌های فیلتر کالمن برای داده فرضی توضیح داده شده و به همین ترتیب این مراحل برای سری واقعی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در سری واقعی معادله اولیه دبی-اشل براساس اطلاعات واقعی به‌دست آمده است.

➤ گام اول

یک سری داده فرضی برای بازه اشل‌های ۵۰ تا ۷۰ سانتی‌متر با رابطه $Q = 5 \times h + 10$ فرض شد. مقادیر دبی در جدول ۳ آورده شده است.

➤ گام دوم

یک رابطه دبی-اشل مانند $Q = (6 \times h) + 8$ که ضرایب آن با رابطه ایده‌آل فاصله داشته فرض می‌شود تا بتوان به‌وسیله فیلتر کالمن و مقادیر اندازه‌گیری شده آن را اصلاح کرد.

➤ گام سوم

در این گام فرض می‌شود که خطای ابزار اندازه‌گیری مورد استفاده از توزیع نرمال تبعیت کرده و واریانس خطای ابزار اندازه‌گیری (σ_n) برابر ۱۰ است. لذا جهت به‌دست آوردن مقادیر اندازه‌گیری شده دبی در سری فرضی باید با تولید یک سری اعداد تصادفی^{۱۹} با توزیع نرمال $X \sim N(0, \sqrt{10})$ و جمع آن با مقادیر دبی ایده‌آل، سری اندازه‌گیری با واریانس موردنظر به دست آید. نتایج دبی‌های به‌دست آمده براساس رابطه اساسی $(Q = (5 \times h) + 10)$ ، رابطه فرضی $(Q = (6 \times h) + 8)$ ، مقادیر تصادفی و سری مقادیر اندازه‌گیری که از اختلاف مقادیر تصادفی با دبی‌های رابطه اساسی به‌دست آمده‌اند در جدول ۳ آورده شده است.

➤ گام چهارم

در این گام با استفاده از روابط ۱۱ و ۱۲ ضرایب معادله فرضی اولیه یعنی $(Q = (6 \times h) + 8)$ در هر گام به‌روزرسانی شده و با استفاده از روابط اصلاح‌شده در هر گام مقادیر اصلاحیه دبی به‌دست می‌آید. مراحل تا زمانی که مقدار ضریب کالمن به صفر و ضرایب معادله دبی-اشل به مقادیر ایده‌آل خود میل کنند ادامه خواهد داشت.

شایان ذکر است، می‌بایست مقدار واریانس خطای مدل (p) یک مقدار فرضی و بزرگ‌تر از واریانس خطای ابزار اندازه‌گیری (r) انتخاب شود. در صورتی که خطای ابزار اندازه‌گیری صفر باشد، مقادیر متغیرهای دبی و ضرایب معادله دبی-اشل در حالت تخمین و به‌روزرسانی با هم برابر می‌شوند. گام‌های ذکر شده در بالا برای یک تکرار در زیر آورده شده است.

باتوجه به توضیحات ارائه شده، مقدار $p = 50$ و $r = 10$ تعیین شد که می‌تواند بسته به مدل تخمین و ابزار اندازه‌گیری مورد استفاده اعداد دیگری باشند. مقدار $p = 50$ با استفاده از داده‌های جدول ۱ و محاسبه واریانس اختلاف داده‌های ستون شماره ۱ و ۲ به‌دست آمده است. در مرحله ۱ با فرض مشاهده اشل $cm50$ ، تصحیحات کالمن به شرح زیر انجام می‌شود:

Table 3- Information on stage-discharge values and measured values

جدول ۳- اطلاعات مقادیر دبی- اشل و مقادیر اندازه گیری

h (cm)	Discharge based on	Discharge based on	Random values	Measured values (m ³ /s)
	5h+10 (m ³ /s)	6h+8 (m ³ /s)		
50	260	308	0.71	260.71
51	265	314	-2.47	262.53
52	270	320	-0.56	269.44
53	275	326	-2.57	272.43
54	280	332	-0.71	279.29
55	285	338	3.34	288.34
56	290	344	3.61	293.61
57	295	350	-5.21	289.79
58	300	356	3.13	303.13
59	305	362	-0.95	304.05
60	310	368	-8.01	301.99
61	315	374	-1.18	313.82
62	320	380	-3.69	316.31
63	325	386	-4.64	320.36
64	330	392	3.04	333.04
65	335	398	1.80	336.80
66	340	404	0.18	340.18
67	345	410	0.32	345.32
68	350	416	5.37	355.37
69	355	422	-1.75	353.25
70	360	428	-5.71	354.29

۲۶۵/۰۱ مترمکعب بر ثانیه به دست آمد. همچنین به روزرسانی واریانس خطای مدل نیز برابر است با:

$$p_{u,1} = (1 - 0.833)50 \rightarrow p_{u,1} = p_{s,2} = 8.33$$

ضریب کالمن میزان تأثیر مقدار z را در معادلات مشخص می کند. اگر در طول گامها این ضریب به سمت صفر میل نماید، با اصلاح ضرایب رابطه دبی- اشل از وزن z در تصحیحات کاسته می شود. به همین دلیل نیز در اولین گام با توجه به اختلاف کم مقدار z با داده ایده آل، مقدار دبی تخمینی بسیار نزدیک به حالت ایده آل به دست می آید. به همین ترتیب مراحل تکرار تا میل ضریب کالمن به سمت صفر ادامه پیدا می کند. بدین ترتیب، معادله نهایی به دست آمده بهترین و دقیق ترین معادله برای تعیین دبی خواهد بود.

همان طور که گفته شد در این تحقیق از داده های واقعی اندازه گیری شده در محل ایستگاه هیدرومتری حمیدیه واقع بر روی رودخانه کرخه استفاده شد. با توجه به بازدیدهای میدانی و شناخت از دستگاه مولینه و رژیم رودخانه کرخه، مقدار واریانس خطای مدل و مولینه به ترتیب

$$p_{1,0} = 200, r_1 = 10, a_{s,1} = 6, b_{s,1} = 8$$

$$h = 50 \rightarrow x_{s,1} = (6 \times 50) + 8 \rightarrow x_{s,1} = 308 \text{ cms}$$

$$k_1 = \frac{p_{s,1}}{p_{s,1} + r_1} \rightarrow \frac{50}{50 + 10} = 0.833$$

$$z_1 = 260.71 \text{ cms}$$

$$(h \times a_{u,1}) + (K_1 \times b_{u,1})$$

$$= (a_{s,1} \times h(1 - K_1)) + (K_1 \times z_1),$$

$$(K_n \times a_{u,1} \times h) + b_{u,1} = b_{s,1}(1 - K_1) + (K_1 \times z_1)$$

$$(50 \times a_{u,1}) + (0.833 \times b_{u,1})$$

$$= (6 \times 50(1 - 0.833))$$

$$+ (0.833 \times 260.71),$$

$$(0.833 \times a_{u,1} \times 50) + b_{u,1}$$

$$= 8(1 - 0.833) + (0.833$$

$$\times 260.71)$$

$$a_{u,1} = 5.57, b_{u,1} = -13.5 \rightarrow x_{u,1}$$

$$= (5.57 \times 50) - 13.5$$

$$x_{u,1} = 265.01 \text{ cms}$$

در نتیجه معادله اصلاح شده در پایان مرحله اول برابر است با $Q = ((5.57 \times h) - 13.5)$ و همچنین مقدار دبی به روزرسانی شده برابر

۲۲۵ و ۲۵ تعیین شد. معادله اولیه دبی اشل حاصل از ۲۰ داده اندازه‌گیری برابر است با:

$$Q = (0.774 \times h) - 42.885 \quad (۱۳)$$

با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری و مراحل توضیح داده‌شده می‌توان معادله دبی-اشل نهایی را به دست آورد.

ارزیابی رگرسیون خطی و فیلتر کالمن

به منظور ارزیابی صحت عملکرد روش رگرسیون خطی و فیلتر کالمن در کاهش خطای مدل با داده‌های مشاهداتی از معیارهای ارزیابی خطای^{۲۰} MAE و^{۲۱} RMSE استفاده شد.

آماره MAE

میانگین خطای مطلق یا MAE یک معیار معروف برای مسائل رگرسیون است. واحد این معیار خطا با واحد متغیر موردبررسی یکسان است. میانگین خطای مطلق، قدرمطلق تفاوت بین مقادیر پیش‌بینی شده و واقعی را اندازه‌گیری می‌کند. زمانی که هدف ارزیابی عملکرد یک مدل رگرسیون بوده، به‌طوری که وزن‌های مساوی برای همه‌ی خطاها و صرف‌نظر از دامنه آن‌ها در نظر گرفته شود، MAE یک معیار مفید است. رابطه ریاضی MAE به شرح زیر است (Hodson et al., 2022).

$$MAE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |Q_{obs} - Q_{sim}| \quad (۱۴)$$

در رابطه فوق، متغیر Q بیانگر دبی جریان، اندیس obs نشان‌دهنده داده‌های مشاهداتی، اندیس sim نشان‌دهنده داده‌های شبیه‌سازی و متغیر m نیز تعداد داده‌های مورداستفاده است. بازه عددی MAE از صفر (بهترین) تا ∞ (بدترین) است.

آماره RMSE

خطای جذر میانگین مربعات RMSE یکی دیگر از معیارهای ارزیابی دقت مدل‌های پیش‌بینی با داده‌های واقعی به شمار می‌رود که در علم هیدرولوژی کاربرد گسترده دارد. در کنار استفاده از ضریب MAE، از این معیار نیز باهدف ارزیابی دقت مدل نهایی و کارایی فیلتر کالمن استفاده شد. رابطه ریاضی RMSE به شرح زیر است (Adnan et al., 2020):

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Q_{obs}^i - Q_{sim}^i)^2}{N}} \quad (۱۵)$$

بازه عددی RMSE نیز همانند MAE از صفر (بهترین) تا ∞ (بدترین) است.

۳- نتایج و بحث

بر اساس روش‌شناسی ارائه‌شده، محاسبات با استفاده از داده‌های فرضی و اندازه‌گیری شده انجام گرفت. در این بخش نتایج به‌دست آمده برای ارائه شده است.

۳-۱- نتایج سری فرضی

با استفاده از داده‌های فرضی، روابط دبی-اشل در ۸ گام محاسباتی مورد به‌روزرسانی قرار گرفت. هدف از انجام این محاسبات ارزیابی کارایی روش‌شناسی ارائه‌شده در افزایش دقت روابط دبی-اشل است. این نکته باید موردتوجه قرار گیرد که به دلیل وجود خطا در داده‌های اندازه‌گیری شده، ارزیابی بهبود در روابط دبی-اشل با توجه به داده‌های اندازه‌گیری شده ممکن نیست. از این رو نیاز است تا با فرض یک سری داده‌ی ایده‌آل بهبود به‌دست آمده مورد ارزیابی قرار گیرد. در جدول‌های ۴ و ۵ جدول نتایج محاسبات برای سری فرضی در ۸ گام محاسباتی برای روش رگرسیون خطی و فیلتر کالمن ارائه شده است.

Table 4- Calculation of steps 1 to 8 for hypothetical data series using Kalman Filter

جدول ۴- نتایج محاسبات گام ۱ تا ۸ برای سری داده‌های فرضی با استفاده از روش فیلتر کالمن

STEP	p_s	kalman gain	h	a_s	b_s	x_s	z	a_u	b_u	x_u	p_u
1	50	0.833	50	6	8	308.00	260.71	5.57	-13.50	265.01	8.33
2	8.33	0.455	55	5.57	-13.50	292.86	288.34	5.54	-14.91	290.03	4.55
3	4.55	0.313	59	5.54	-14.91	312.21	304.05	5.51	-16.85	308.33	3.13
4	3.13	0.238	63	5.51	-16.85	330.37	320.36	5.48	-18.78	326.52	2.38
5	2.38	0.192	65	5.48	-18.78	337.48	336.8	5.48	-18.89	337.26	1.92
6	1.92	0.161	70	5.48	-18.89	364.66	354.29	5.46	-20.33	361.78	1.61
7	1.61	0.139	57	5.46	-20.33	290.82	289.79	5.46	-20.45	290.57	1.39
8	1.39	0.122	68	5.46	-20.45	350.59	355.37	5.46	-19.93	351.63	1.22

* The index s represents the estimated value and the index u represents the updated value.

Table 5- Calculation of steps 1 to 8 for hypothetical data series using Linear Regression

جدول ۵- نتایج محاسبات گام ۱ تا ۸ برای سری داده‌های فرضی با استفاده از روش رگرسیون

STEP	h	a _s	b _s	x _s	z	a _u	b _u	x _u
1	50	6	8	308.00	260.71	6.03	3.14	304.85
2	55	6.03	3.14	335.02	288.34	6.04	0.18	332.27
3	59	6.04	0.18	356.42	304.05	6.02	-1.56	353.45
4	63	6.02	-1.56	377.52	320.36	5.97	-1.81	374.18
5	65	5.97	-1.81	386.11	336.8	5.92	-1.35	383.21
6	70	5.92	-1.35	412.80	354.29	5.83	1.09	408.85
7	57	5.83	1.09	333.12	289.79	5.83	-0.96	331.15
8	68	5.83	-0.96	395.25	355.37	5.78	0.16	393.00

*The index s represents the estimated value and the index u represents the updated value.

ضریب کالمن کاسته می‌شود. یکی از مهم‌ترین مزایای این خاصیت را می‌توان این‌گونه بیان کرد که اگر در گام‌های بالای فیلتر کالمن از یک داده‌ی پرت به‌عنوان داده اندازه‌گیری استفاده شود، تأثیر آن بر ضرایب کم خواهد بود. تنها نکته کلیدی این است که باید از صحت و دقت داده‌های اندازه‌گیری شده مورد استفاده در گام‌های اولیه که ضرایب اصلاحی بالایی دارند اطمینان حاصل شود.

۳- طبق جدول ۴ بعد از ۸ گام به‌روزرسانی، مقادیر a و b (ضرایب معادله دبی-اشل) برابر $۵/۴۶$ و $-۱۹/۹۳$ هستند. مقادیر اولیه ضرایب به ترتیب ۶ و ۸ بوده که در هر گام به‌روزرسانی اصلاح شده و با افزایش گام و کاهش ضریب کالمن میزان تغییرات این ضرایب نیز کاهش می‌یابد. ضرایب به‌دست‌آمده بعد از اصلاح در هر گام تا اندازه‌گیری بعدی به‌عنوان معادله اصلی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

نتایج ارائه‌شده نشان می‌دهد:

۱- طبق جدول ۴ مقادیر ضریب کالمن و واریانس خطای مدل بعد از ۸ تکرار به ترتیب از مقادیر $۰/۸۳۳$ و ۵۰ به مقادیر $۰/۱۲۲$ و $۱/۳۹$ کاهش یافته که نشان از افزایش دقت معادله به‌روزرسانی شده در گام آخر است. در واقع می‌توان بیان کرد با افزایش گام‌ها مقادیر واریانس خطای مدل (p) و ضریب کالمن (k) به صفر میل می‌کنند.

۲- طبق شکل ۵ در واقع با افزایش گام‌ها ضریب کالمن روند کاهشی داشته و میزان تأثیر مقادیر اندازه‌گیری را در روند اصلاح متغیرهای حالت (ضرایب معادله) را کاهش می‌دهند. می‌توان این خاصیت را این‌گونه تفسیر کرد که در گام‌های ابتدایی میزان تأثیر داده‌های اندازه‌گیری در به‌روزرسانی متغیرهای حالت (ضرایب معادله) بسیار زیاد بوده و به همین دلیل پس از چند گام با نزدیک شدن ضرایب به مقدار بهینه خود از میزان تأثیر داده‌های اندازه‌گیری به علت کاهش مقدار

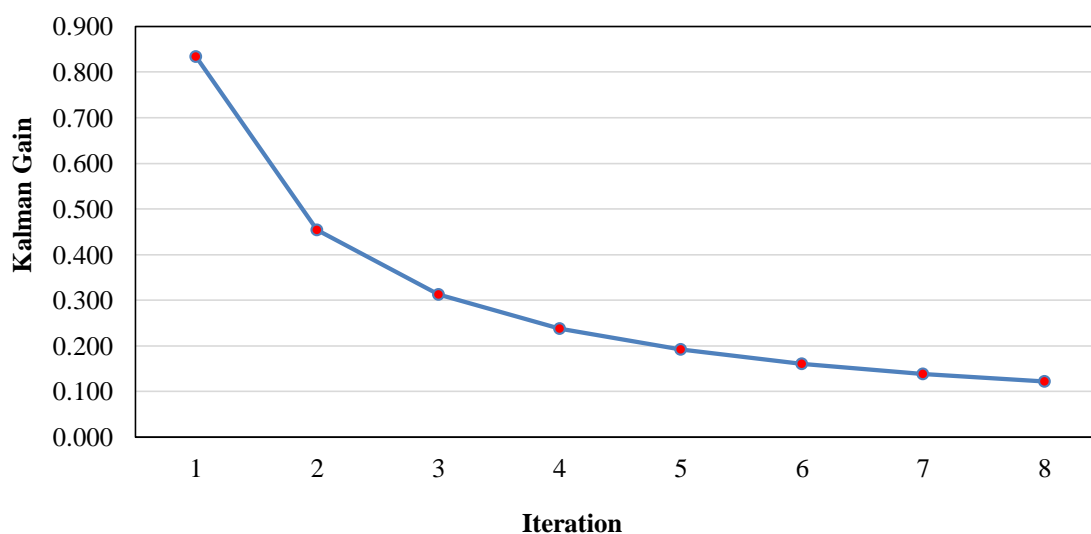


Fig. 5- The trend of decreasing Kalman Gain by increasing iterations

شکل ۵- روند کاهش ضریب کالمن با افزایش تکرار

دبی- اشل بهروز شده با استفاده از رگرسیون رسم شده است. این شکل اختلاف بین سری اولیه با سه سری دیگر و نیز نزدیکی دبی‌های سری ایده‌آل و سری دبی‌های بهروز شده در هر گام با استفاده از روش فیلتر کالمن را نشان می‌دهد.

به منظور بررسی ارزیابی روش رگرسیون خطی و فیلتر کالمن آماره‌های MAE و RMSE با استفاده از مقادیر دبی محاسباتی قبل و بعد از اعمال فیلتر کالمن محاسبه شد. نتایج به‌دست آمده در جدول ۷ آورده شده است. با توجه به نتایج MAE و RMSE می‌توان بیان داشت که در صورت استفاده از معادله اولیه میزان خطا طبق آماره‌های RMSE و MAE به ترتیب برابر $59/2$ و $58/9$ مترمکعب بر ثانیه بوده درحالی‌که در صورت استفاده از فیلتر کالمن میزان خطا برای هر دو آماره نسبت به حالت اول حدود ۹۴ درصد کاهش خواهد یافت و به مقادیر به ترتیب $3/44$ و $3/1$ مترمکعب بر ثانیه خواهد رسید. این میزان کاهش خطا نشان‌دهنده کارایی مطلوب فیلتر کالمن در بهروزرسانی رابطه دبی- اشل اولیه است. قابل توجه است که دلیل این میزان بالای کاهش خطا به دلیل فرض ضرایب پرت برای معادله اولیه نیز است. این فرض به منظور ارزیابی میزان توانایی فیلتر کالمن در بهبود ضرایب صورت گرفت. همچنین مقادیر آماره‌های RMSE و MAE برای روش رگرسیون به ترتیب برابر $45/93$ و $45/7$ مترمکعب بر ثانیه بوده که دارای خطای زیاد و نزدیک به نتایج رابطه اولیه هستند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش فیلتر کالمن در بهروزرسانی روابط دبی- اشل خطی بهتر از روش رایج رگرسیون خطی عمل نموده است. به همین منظور در این پژوهش از روش فیلتر کالمن برای اصلاح شرایط واقعی در رودخانه کرخه استفاده شد.

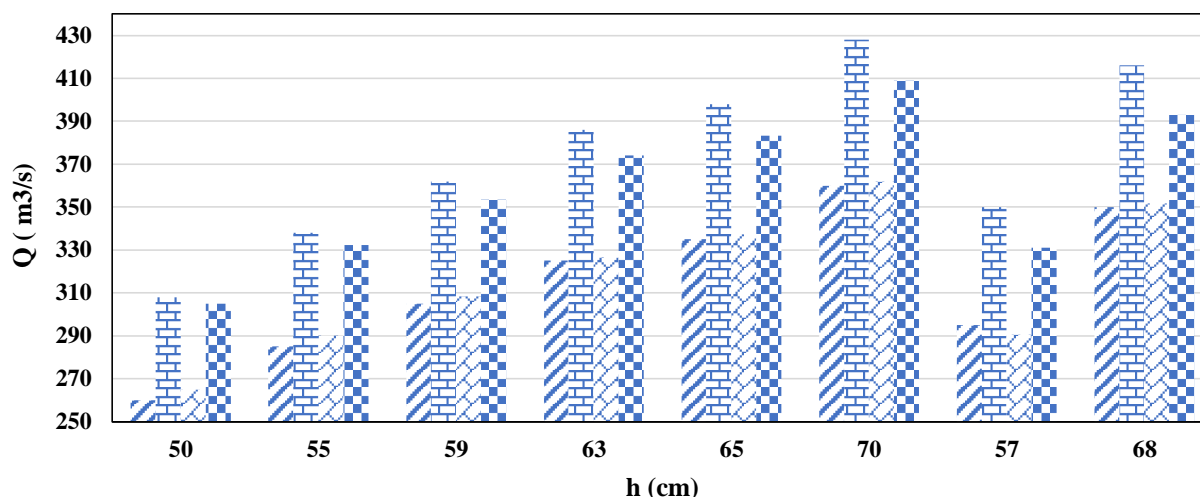
۴- طبق جدول ۵ بعد از ۸ گام بهروزرسانی، مقادیر a و b (ضرایب معادله دبی- اشل) برابر $5/78$ و $0/16$ هستند. مقادیر اولیه ضرایب به ترتیب ۶ و ۸ بوده که در هر گام براساس روش رگرسیون بهروزرسانی و اصلاح شده است.

در جداول ۴ و ۵ در پایان هر گام مقادیر ضرایب اصلاحی (a_u و b_u) به دست می‌آیند که به‌وسیله آن می‌توان دبی بهروزرسانی آن گام را برای اشل موردنظر به دست آورد. بر این اساس، طبق جدول ۶ مقادیر دبی به دست آمده طبق ضرایب هر گام با مقادیر دبی سری ایده‌آل و اولیه مقایسه شد.

طبق جدول ۶ همان‌طور که انتظار می‌رفت مقدار دبی حاصل از سری اولیه دارای خطای بسیار زیادی نسبت به سری واقعی (ایده‌آل) بوده اما نتایج حاصل از بهروزرسانی ضرایب توسط فیلتر کالمن حتی باوجود رابطه اولیه پرت به مقادیر ایده‌آل بسیار نزدیک است. از طرفی، نتایج نشان می‌دهد دبی‌های اصلاح‌شده از روش رگرسیون دارای خطای زیادی نسبت به داده‌های واقعی بوده که این نشان‌دهنده ضعف روش رگرسیون در بهروزرسانی روابط دبی- اشل است. طبق جدول ۶ مقادیر دبی حاصل از معادلات اصلاحی فیلتر کالمن هر گام با مقادیر سری ایده‌آل اختلاف بسیار کمی داشته و این خود حاکی از برتری روش فیلتر کالمن است. همچنین در آخرین گام اختلاف دبی سری ایده‌آل و معادله نهایی کمتر از ۲ مترمکعب بر ثانیه بوده و در صورت ادامه این فرآیند میزان خطا نیز کمتر خواهد شد. در شکل ۶ نمودار دبی‌های به‌دست آمده با استفاده از رابطه دبی- اشل اولیه، رابطه دبی- اشل ایده‌آل، رابطه دبی- اشل بهروز شده با استفاده از فیلتر کالمن و رابطه

Table 6- Discharge results based on the coefficients of each step; ideal series, initial series
جدول ۶- نتایج دبی براساس ضرایب هر گام، سری ایده‌آل، سری اولیه

h	Discharge using Ideal Stage-Discharge relation	Discharge using Stage-Discharge relation updated by Kalman filter at each step	Discharge using Stage-Discharge relation updated by Linear Regression at each step	Discharge using initial Stage-Discharge relation $Q = (6 \times h) + 8$
50	260	265.01	304.85	308
55	285	290.03	332.27	338
59	305	308.33	353.45	362
63	325	326.52	374.18	386
65	335	337.26	383.21	398
70	360	361.78	408.85	428
57	295	290.57	331.15	350
68	350	351.63	393.00	416



- ▨ Discharge using Ideal Stage-Discharge relation
- ▣ Discharge using initial Stage-Discharge relation
- ▩ Discharge using Stage-Discharge relation updated by Kalman filter at each step
- ▤ Discharge using Stage-Discharge relation updated by Linear Regression at each step

Fig. 6- Discharge results based on the coefficients of each step, ideal series, initial series

شکل ۶- نتایج دبی براساس ضرایب هر گام، سری ایده‌آل، سری اولیه

Table 7- MAE and RMSE coefficient values for the hypothetical series using Kalman Filter & Linear Regression

جدول ۷- مقادیر ضریب MAE و RMSE برای سری فرضی با استفاده از روش فیلتر کالمن و رگرسیون خطی

	Discharge using ideal Stage-Discharge relationship	
	RMSE	MAE
Discharge using the initial Stage-Discharge relationship	59.22	58.9
Discharge using Stage-Discharge relation updated by Kalman filter at each step	3.44	3.1
Discharge using Stage-Discharge relation updated by Linear Regression at each step	45.93	45.7

۱- دبی‌های به‌دست آمده از روابط دبی- اشل به‌روزرسانی شده در همه‌ی گام‌ها به‌جز در اشل‌های ۱۲۴ و ۹۴ همواره مابین مقادیر رابطه اولیه و مقادیر اندازه‌گیری شده بوده است. این موضوع، نشان دهنده اصلاح مقادیر دبی به‌دست آمده از رابطه اولیه در هر گام است؛

۲- با بررسی‌های بیشتر مقدار دبی اندازه‌گیری شده در اشل ۱۲۴ سانتی‌متری مشخص شد که مقدار دبی واقعی بیشتر از دبی اندازه‌گیری شده در این اشل بوده است. بررسی عملکرد فیلتر کالمن در این اشل نشان می‌دهد، فیلتر کالمن مقدار دبی را در اشل مذکور از مقدار اندازه‌گیری بیشتر برآورد کرده است. این نشان می‌دهد در فیلتر کالمن مقادیر دبی‌های به‌دست آمده با استفاده از روابط اصلاح‌شده، حساسیت کمتری نسبت به دبی‌های اندازه‌گیری شده با خطای بالا دارند.

۳-۲- نتایج سری واقعی

نتایج به‌دست آمده از پیاده‌سازی فیلتر کالمن با استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده در ایستگاه هیدرومتری حمیدیه در جدول ۷ آورده شده است. به‌روزرسانی روابط معادله دبی- اشل ایستگاه حمیدیه در ۹ گام انجام شد و در پایان هر گام ضرایب اصلاحی (a_{ii} و b_{ii}) به‌دست آمد.

به منظور بررسی عملکرد فیلتر کالمن، (۱) مقادیر دبی اندازه‌گیری شده در ایستگاه، (۲) دبی‌های به‌دست آمده از رابطه دبی- اشل اولیه و (۳) دبی‌های به‌دست آمده از روابط دبی- اشل به‌روزرسانی شده با استفاده از فیلتر کالمن در شکل ۷ ترسیم شد. بر این اساس نتایج زیر به‌دست آمد:

Table 7- The results of the Stage-Discharge relationship modification at Hamidiyeh station

جدول ۷- نتایج اصلاح رابطه دبی- اشل ایستگاه حمیدیه

Step	p_s	kalman gain	h	a_s	b_s	x_s	z	a_u	b_u	x_u	p_u
1	225.00	0.90	116	0.77	-42.89	46.90	44.79	0.77	-43.88	44.90	22.50
2	22.50	0.47	90	0.77	-43.88	25.00	31.26	0.79	-41.87	29.02	11.84
3	11.84	0.32	111	0.79	-41.87	45.57	48.45	0.79	-41.17	46.97	8.04
4	8.04	0.24	70	0.79	-41.17	14.41	20.61	0.81	-39.96	16.84	6.08
5	6.08	0.20	48	0.81	-39.96	-1.01	14.83	0.87	-37.37	4.17	4.89
6	4.89	0.16	124	0.87	-37.37	69.94	48.42	0.84	-40.39	63.89	4.09
7	4.09	0.14	94	0.84	-40.39	38.66	35.31	0.84	-40.81	37.83	3.52
8	3.52	0.12	80	0.84	-40.81	26.12	27.30	0.84	-40.68	26.38	3.08
9	3.08	0.11	57	0.84	-40.68	7.10	17.82	0.86	-39.62	9.22	2.74

*The index s represents the estimated value and the index u represents the updated value.

مناسب خود رسیده و اثر مقادیر اندازه‌گیری را کاهش داده که نتیجه آن برآورد دبی بیشتر برای اشل ۹۴ سانتی‌متر شده است؛ ۴- طبق رابطه اولیه مقادیر دبی در اشل ۴۸ منفی به‌دست آمده است. این در حالی است که با استفاده از فیلتر کالمن این مقدار به محدوده مثبت برگشته است. به دست آمدن دبی منفی نشان از خطای رابطه در اشل‌های پایین داشته که فیلتر کالمن به‌خوبی توانسته این خطا را اصلاح کند.

طبق فیلتر کالمن با افزایش گام‌ها و کاهش ضریب کالمن میزان تأثیر مقادیر اندازه‌گیری بر روی مقادیر به‌روزرسانی نیز کاهش می‌یابد و این یکی از شاخصه‌های بسیار خوب فیلتر کالمن در اصلاح خطاهای به‌شمار می‌رود؛ ۳- در اشل ۹۴ نیز می‌توان همانند اشل ۱۹۴ سانتی‌متری می‌توان بیان کرد که مدل با توجه به اصلاحات ضرایب در گام‌های قبلی به‌دقت

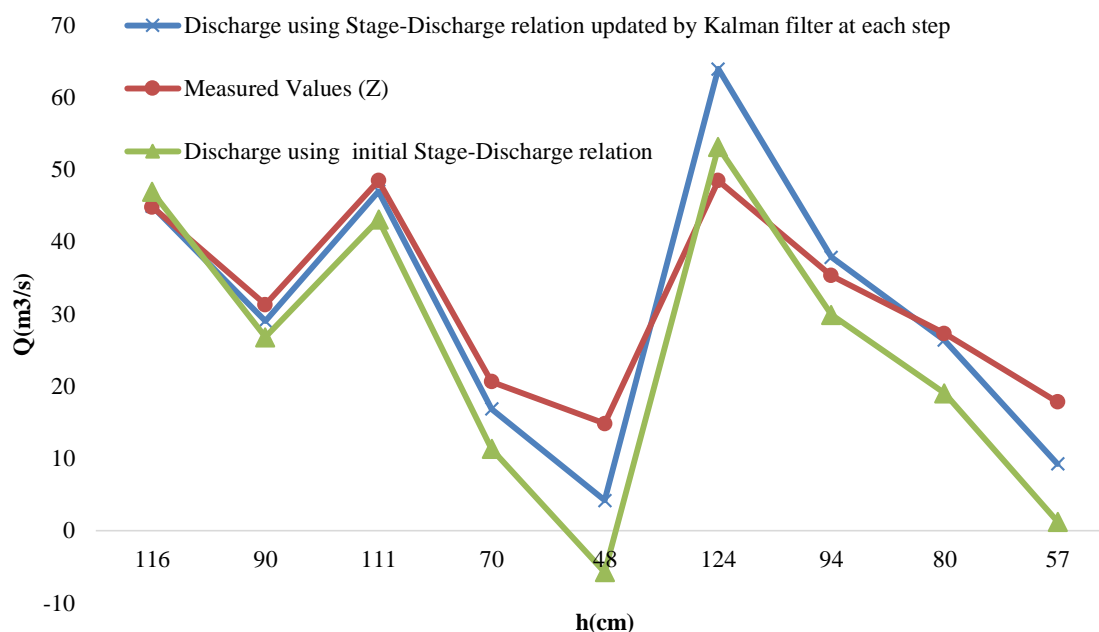


Fig. 7- The measured discharge values, the discharge based on the equations of each step and the discharge based on the initial relationship

شکل ۷- مقادیر دبی اندازه‌گیری، دبی براساس معادلات هر گام و دبی براساس رابطه اولیه

کالمن می‌توان در هر گام ضرایب دقیق‌تری نسبت به گام قبل برای رابطه دبی-اشل به دست آورد.

باهداف بررسی کارایی و دقت فیلتر کالمن در شرایط استفاده از داده‌های اندازه‌گیری شده نیز از آماره‌های MAE و RMSE استفاده شد (جدول ۸) نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد، در صورت استفاده از معادله اولیه میزان خطا طبق آماره‌های MAE و RMSE به ترتیب برابر ۱۰/۳ و ۸/۵ مترمکعب بر ثانیه بوده است. این در حالی است که در صورت استفاده از فیلتر کالمن مقادیر آماره‌های مذکور به ترتیب ۳۱ و ۴۲ درصد کاهش می‌یابد. با توجه به مقادیر این ۲ آماره هم برای سری فرضی و واقعی می‌توان استفاده از این فیلتر را بسیار کاربردی و مفید به خصوص در شرایط سیلابی دانست.

روند به‌روزرسانی دبی‌های به‌دست آمده از روابط دبی-اشل اصلاحی در هر گام با دبی به‌دست آمده از رابطه دبی-اشل نهایی در شکل ۸ مقایسه شده است. بر این اساس می‌توان نتایج زیر را بیان کرد:

(۱) این نمودار به‌طور واضح نشان می‌دهد که با افزایش گام‌های فیلتر کالمن مقادیر دبی محاسبه‌شده براساس ضرایب هر گام و ضرایب نهایی در نهایت به یک مقدار رسیده و این نشان می‌دهد که ضرایب نهایی به‌دست آمده براساس فیلتر کالمن صحیح و دقیق است؛

(۲) روند نزدیک شدن دو نمودار به هم نشان‌دهنده کاهش ضریب کالمن در گام‌های متوالی است. این امر نشان می‌دهد که با افزایش گام‌ها و کاهش ضریب کالمن، هم‌زمان با به‌روزرسانی ضرایب معادله دبی-اشل، دقت معادلات به‌دست آمده به سمت مقدار بهینه میل می‌کنند. بدین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که با استفاده از فیلتر

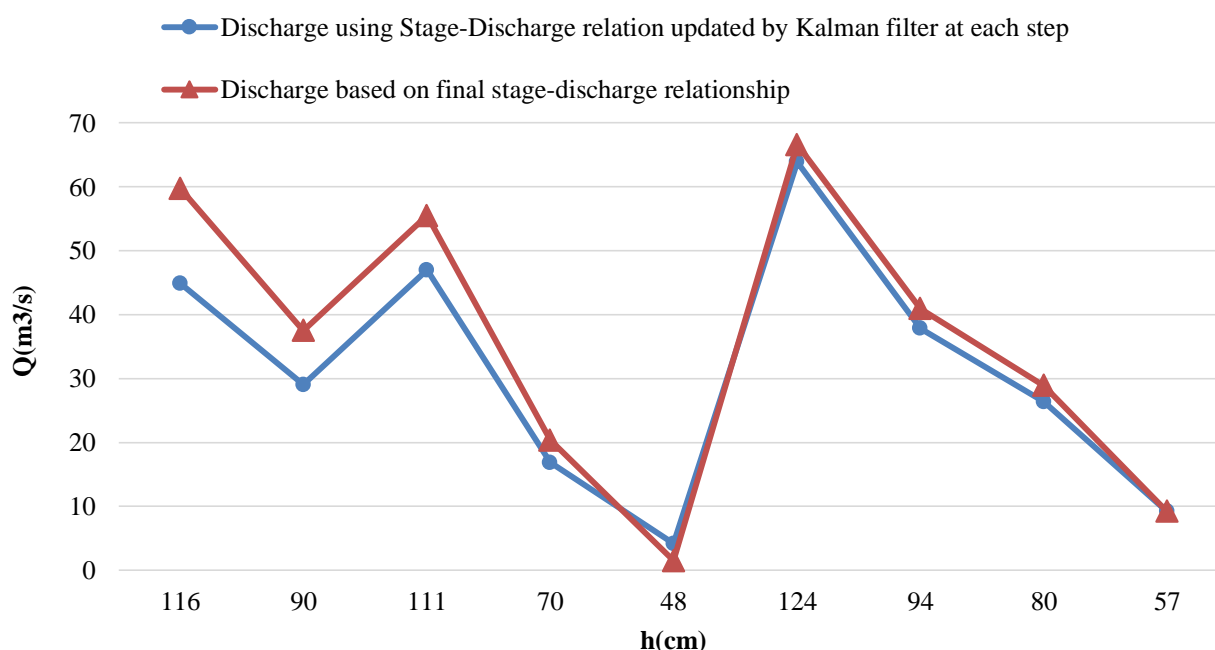


Fig. 8- Discharge based on the coefficients of each step and the coefficients of the final equation

شکل ۸- مقادیر دبی براساس ضرایب هر گام و ضرایب معادله نهایی

Table 8- MAE and RMSE coefficient values for real series

جدول ۸- مقادیر ضریب MAE و RMSE برای سری واقعی

	Measured discharge	
	RMSE	MAE
Discharge using the initial stage-discharge relationship	10.3	8.5
Discharge using stage-discharge relation updated by Kalman filter	7.1	5.1

۴- نتیجه گیری

اشل میزان هر دو آماره به ترتیب ۳۱ و ۴۲ درصد کاهش یافته است. این موضوع، کارایی استفاده از فیلتر کالمن را در شرایط واقعی را نشان می دهد. در نهایت می توان نتیجه گرفت که استفاده از داده گواری با تکنیک فیلتر کالمن در زمینه به روزرسانی معادلات دبی- اشل در رودخانه ها به خصوص در شرایط سیلابی که استفاده از این روابط عدم قطعیت بالایی دارد کارایی بالایی دارد.

پی نوشت ها

- 1- Measured values
- 2- Data Assimilation
- 3- Kalman Filter
- 4- Extended Kalman Filter
- 5- Ensemble Kalman Filter
- 6- Shuffled Complex Evolution (SCE-UA)
- 7- Particle Filter
- 8- Aishihik
- 9- Mayo
- 10- Yukon
- 11- Peruvian Tropical Andes
- 12- Ensemble Kalman Inversion
- 13- Bayesian
- 14- Coefficient Of Determination
- 15- Mean Section Method
- 16- Linear Regression
- 17- Rudolf Emil Kálmán
- 18- Kalman Gain
- 19- Random Values
- 20- Mean Absolute Error
- 21- Root Mean Square Error

بر آورد صحیح دبی در رودخانه ها به خصوص در شرایط سیلابی همواره از اهمیت بالایی برخوردار بوده است. با توجه به محدودیت های موجود در اندازه گیری مستقیم دبی در رودخانه ها، از روابط دبی- اشل به دست آمده با استفاده از اندازه گیری های قبلی در مقطع مورد نظر استفاده می شود. با توجه به وجود عدم قطعیت های ناشی از خطای ابزار اندازه گیری و معادله به دست آمده از رگرسیون و همچنین تغییرات مقاطع رودخانه ای تحت تأثیر فرسایش و رسوب گذاری در روش دبی- اشل، در بسیاری از موارد این روابط عدم قطعیت بالایی دارند. در این پژوهش به بررسی مقایسه ای روش های رگرسیون خطی و داده گواری فیلتر کالمن در به روزرسانی روابط دبی- اشل پرداخته شد. با توجه به اینکه در شرایط واقعی به علت وجود خطای ابزار اندازه گیری نمی توان مقدار دبی واقعی را به دست آورد، به منظور ارزیابی عملکرد دو روش از یک سری داده ی فرضی دبی- اشل استفاده شد. بدین گونه که میزان دبی واقعی در شرایط ایده آل برابر مقادیری مشخص فرض شد و مقادیر دبی اندازه گیری شده توسط ابزار با اعمال خطای تصادفی با توزیع نرمال $X \sim N(0, \sqrt{10})$ به مقادیر دبی واقعی به دست آمد. سپس با استفاده از رگرسیون خطی و روابط فیلتر کالمن در ۸ گام ضرایب معادله دبی- اشل اولیه اصلاح شد. برای بررسی صحت معادله نهایی به دست آمده از رگرسیون خطی و فیلتر کالمن از آماره های RMSE و MAE استفاده شد. نتایج حاکی از کاهش حدود ۲۲ و ۹۴ درصدی مقادیر آماره های ارزیابی مورد استفاده به ترتیب در روش رگرسیون خطی و فیلتر کالمن در بر آورد دبی توسط معادله اصلاح شده نسبت به معادله اولیه با داده های واقعی است. میزان RMSE دبی های به دست آمده از رابطه نهایی و داده های واقعی برای روش رگرسیون خطی و فیلتر کالمن به ترتیب برابر $۴۵/۹۳$ و $۳/۴۴$ مترمکعب بر ثانیه و آماره MAE برای رگرسیون خطی و فیلتر کالمن به ترتیب برابر $۴۵/۷$ و $۳/۱$ مترمکعب بر ثانیه به دست آمد. بر این اساس می توان کارایی فیلتر کالمن را در اصلاح و به روزرسانی معادلات دبی اشل تأیید نمود. پس از حصول اطمینان از کارایی فیلتر کالمن در سری فرضی، از سری داده های دبی اندازه گیری شده در ایستگاه هیدرومتری حمیدیه مستقر بر روی رودخانه کرخه به عنوان سری واقعی مورد استفاده قرار گرفت. به همین منظور از ۲۹ داده اخیر دبی- اشل (با حذف داده های پرت) استفاده شد که ۲۰ داده اول برای به دست آوردن رابطه دبی- اشل و ۹ داده دیگر باهدف به روزرسانی با استفاده از فیلتر کالمن استفاده شد. نتایج نشان داد که مقادیر دبی به دست آمده از معادلات اصلاح شده در هر گام تخمین بهتری از دبی نسبت به معادله اولیه دارد. مقادیر آماره های ارزیابی خطا RMSE و MAE در ایستگاه حمیدیه نشان می دهد در صورت استفاده از فیلتر کالمن در به روزرسانی معادله دبی

۵- مراجع

- Alizahed A (2018) Principles of applied hydrology. Imam Reza International University, 946 p (In Persian)
- Azadi M, Soufiyani M, Vakili G, and Ghaemi H (2016) A case study on the impact of synoptic and upper air data assimilation in WRF output for precipitation over Iran. *Iranian Journal of Geophysics* 10(2):110–119 (In Persian)
- Cho KH, Pachepsky Y, Ligaray M, Kwon Y, and Kim KH (2020) Data assimilation in surface water quality modeling: A review. *Water Research* 186:116307
- Clark MP, Rupp DE, Woods RA, Zheng X, Ibbitt RP, Slater AG, Schmidt J, and Uddstrom MJ (2008) Hydrological data assimilation with the ensemble Kalman filter: Use of streamflow observations to update states in a distributed hydrological model. *Advances in Water Resources* 31(10):1309–1324
- Franssen H-JH and Neuweiler I (2015) Data assimilation for improved predictions of integrated terrestrial systems. *Advances in Water Resources* 86:257–259
- Ghorbanidehno H, Kokkinaki A, Lee J, and Darve E (2020) Recent developments in fast and scalable inverse modeling and data assimilation methods in hydrology. *Journal of Hydrology* 591:125266
- Goudarzi M, Lashkar-Ara B, and Seyed Kaboli H (2021) Experimental study of the consolidation of the cohesive sediments Case study: Karkheh dam reservoir. *Scientia Iranica*. Department of Civil Engineering, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Postal Code: 64616-18674, Iran 28(6):3072–3081
- Kutner MH, Nachtsheim CJ, Neter J, and Li W (2005) *Applied linear statistical models*. McGraw-hill
- Llauca H, Arestegui M, and Lavado-Casimiro W (2023) Constraining flood forecasting uncertainties through streamflow data assimilation in the tropical Andes of Peru: Case of the Vilcanota River Basin. *Water* 15(22):3944
- Mehrparvar M, Asghari K, and Golmohammadi MH (2019) Reducing error of rainfall-runoff simulation using coupled hydrological SWAT model and data assimilation technique. *Iran-Water Resources Research* 14(5):85–102 (In Persian)
- Park K II and Park M (2018) *Fundamentals of probability and stochastic processes with applications to communications*. Springer
- Pensoneault A, Krajewski WF, Velásquez N, Zhu X, and Mantilla R (2023) Ensemble Kalman Inversion for upstream parameter estimation and indirect streamflow correction: A simulation study. *Advances in Water Resources* 181:104545
- Piazzzi G, Thirel G, Perrin C, and Delaigue O (2021) Sequential data assimilation for streamflow forecasting: Assessing the sensitivity to uncertainties and updated variables of a conceptual hydrological model at basin scale. *Water Resources Research*. John Wiley & Sons, Ltd 57(4)
- Samuel J, Rousseau AN, Abbasnezhadi K, and Savary S (2019) Development and evaluation of a hydrologic data-assimilation scheme for short-range flow and inflow forecasts in a data-sparse high-latitude region using a distributed model and ensemble Kalman filtering. *Advances in Water Resources* 130:198–220
- Tajiki M, Najafinejad A, Bahremand A, Schoups G, and Hendricks-Franssen H-J (2019) Improving river discharge forecasting with the hmod conceptual rainfall-runoff model using data assimilation. *Iran-Water Resources Research* 15(4):137–147 (In Persian)
- Julier SJ and Uhlmann JK (2004) Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE* 92(3):401–422
- Evensen G (1994) Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. Wiley Online Library 99(C5):10143–10162
- Houtekamer PL and Mitchell HL (1998) *Data assimilation using an ensemble kalman filter technique*. Monthly Weather Review. Boston MA, USA: American Meteorological Society 126(3):796–811